

*У*ЧЕБНОЕ
ПОСОБИЕ

 ПИТЕР®

С. М. Аполлонский

Дифференциальные уравнения математической физики в электротехнике

**РЕКОМЕНДОВАНО
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ**



С. М. АПОЛЛОНСКИЙ

Дифференциальные уравнения математической физики в электротехнике

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки 140400 «Техническая физика» и 220100 «Системный анализ и управление»



Москва • Санкт-Петербург • Нижний Новгород • Воронеж
Ростов-на-Дону • Екатеринбург • Самара • Новосибирск
Киев • Харьков • Минск

2012

Станислав Михайлович Аполлонский

Дифференциальные уравнения математической физики в электротехнике

Серия «Учебное пособие»

Заведующий редакцией
Руководитель проекта
Ведущий редактор
Научный редактор
Художественный редактор
Корректор
Верстка

*А. Кривцов
А. Кривцов
Ю. Сергиенко
К. Кноп
А. Татарко
В. Листова
Л. Харитонов*

ББК 22.161.68я7
УДК 517.958(075)

Аполлонский С. М.

А76 Дифференциальные уравнения математической физики в электротехнике. — СПб.: Питер, 2012. — 352 с.: ил.

ISBN 978-5-496-00046-8

Учебное пособие соответствует требованиям государственных образовательных стандартов ВПО по направлениям подготовки дипломированных специалистов: 650900 (специальность 140601.65 «Электроэнергетика»), 654500 (специальности: 140601.65 «Электромеханика», 140602.65 «Электрические и электронные аппараты»); 654100 (специальность 210106 «Промышленная электроника») и направлениям подготовки бакалавров: 140200.62, 140600.62, 210100.62

Книга предназначена для студентов всех специальностей 140211/100400, 140601/180100, 140602/180200, 210106/200400, изучающих дисциплину «Высшая математика», раздел «Уравнения математической физики», а также рекомендуется студентам других специальностей, изучающим курс математической физики, инженерам и аспирантам.

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки 140400 «Техническая физика» и 220100 «Системный анализ и управление».

ISBN 978-5-496-00046-8

© ООО «Питер Пресс», 2012

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Информация, содержащаяся в данной книге, получена из источников, рассматриваемых издательством как надежные. Тем не менее, имея в виду возможные человеческие или технические ошибки, издательство не может гарантировать абсолютную точность и полноту приводимых сведений и не несет ответственности за возможные ошибки, связанные с использованием книги.

ООО «Питер Пресс», 192162, Санкт-Петербург, д. Волкова, ул. Андреевская д. 3, литер А, пом. 7Н.
Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3005 — литература учебная.
Подписано в печать 29.06.12. Формат 70х100/16. Усл. п. л. 28,380. Тираж 2000. Заказ 6063.

Отпечатано по технологии СІР в ИПК ООО «Ленинградское издательство»
194044, Санкт-Петербург, ул. Менделеевская, д. 9
Телефон/факс: (812) 495-56-10.

Предисловие

Опыт преподавания математических курсов в инженерных вузах показывает, что наибольший эффект в усвоении математических методов и развитии навыков их применения достигается, если изучение соответствующих разделов математики сопровождается решением прикладных задач, относящихся к области интересов будущего специалиста. Такой подход к формированию математического образования полезен и тем, что он усиливает взаимосвязь между математическими и инженерными дисциплинами.

К числу математических дисциплин, изучение которых наиболее полно может быть увязано с прикладными задачами той или иной инженерной специальности, относится математическая физика — третья часть общего курса «Высшая математика», читаемого студентам инженерных специальностей университетов. Изучать его следует после освоения первых двух частей этого курса — «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление».

Математическая физика изучает математические модели физических явлений. Основными объектами математической физики являются дифференциальные уравнения с частными производными, интегро-дифференциальные и интегральные уравнения с краевыми (начальными или граничными) условиями для них.

В книге рассмотрены методы математической физики, связанные с изучением электротехнических дисциплин. Возникающие при этом математические задачи содержат много общих элементов и составляют предмет математической физики.

Предлагаемая книга не претендует на всеобъемлющий охват методов математической физики. В ней рассмотрены лишь методы решения тех задач математической физики, которые сводятся к задачам для дифференциальных уравнений с частными производными и совместно с соответствующими краевыми условиями образуют математические модели рассматриваемых физических процессов. Используются традиционные материалы, излагаемые в аналогичных курсах: виды дифференциальных уравнений математической физики (гиперболические, параболические, эллиптические); постановка краевых задач математической физики; условия существования и единственности их решения. В книгу не входят методы решения интегральных, интегро-дифференциальных уравнений и вариационные методы.

Предполагается, что читателю известны предыдущие разделы вузовского курса высшей математики: дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и многих переменных, векторный анализ, дифференциальные уравнения, ряды, элементы теории аналитических функций комплексного переменного. При подготовке книги использовались как известные фундаментальные учебники и книги, ссылки на которые приведены в каждой главе, так и публикации автора.

Пособие содержит материал, излагаемый в лекциях для специальностей 140211/100400, 140601/180100, 140602/180200, 210106/200400 в Северо-Западном государственном заочном техническом университете. Книга может оказаться полезной и для студентов других специальностей, изучающих курс математической физики.

Введение

Предлагаемая книга посвящена рассмотрению вопросов, связанных с решением задач математической физики, встречающихся в инженерной практике. Это соответствует содержанию раздела «Математическая физика» курса «Высшая математика», изучаемого студентами, начиная с первого семестра.

Содержание книги соответствует государственным стандартам по высшему профессиональному образованию. При ее написании были учтены как общие требования к очному обучению студентов в высших учебных заведениях, так и особенности получения высшего образования в условиях обучения без отрыва от трудовой деятельности. Для пособия отобран минимум учебного материала, дающего студенту возможность в дальнейшем успешно освоить специальные электротехнические дисциплины. Общий его объем составляет 25 печатных листов, что позволяет изучить весь учебный материал в течение одного семестра. Теоретические выкладки и практические расчеты производятся с подробностью, позволяющей студенту самостоятельно разобраться в их содержании и оценить полученный результат. Книга состоит из двух частей. Первая часть, включающая пять глав, знакомит читателя с основными видами дифференциальных уравнений математической физики. В качестве примеров использования тех или иных уравнений взяты традиционные задачи из взаимосвязанных дисциплин (электротехники, термодинамики и механики сплошных сред), преподаваемых в технических вузах. Вторая часть, включающая девять глав, знакомит читателя с важными прикладными разделами электротехники, где используются дифференциальные уравнения математической физики. Последняя, пятнадцатая глава включает материал по специальным функциям, чаще всего используемым при решении прикладных задач электротехники.

Более подробные разъяснения по объему учебного материала, изучаемого с помощью предложенной книги, следует получить у преподавателя, ведущего занятия по данной дисциплине.

Часть I

Методы математической физики и их использование при решении технических задач

Введение. Математическая физика изучает математические модели физических явлений. Она и ее методы начали формироваться в XVIII веке при изучении колебаний струны и стержней, задач акустики, гидродинамики, аналитической механики (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Ж. Лагранж, Д. Бернулли, П. Лаплас). Идеи математической физики получили новое развитие в XIX веке в связи с задачами теплопроводности, диффузии, упругости, оптики, электродинамики, нелинейными волновыми процессами, теорией устойчивости движения (Ж. Фурье, С. Пуассон, К. Гаусс, О. Коши, М. В. Остроградский, П. Дирихле, Б. Риман, С. В. Ковалевская, Д. Стокс, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Д. Гильберт). Новый этап математической физики начинается в XX веке, когда в нее включаются задачи теории относительности, квантовой физики, новые проблемы газовой динамики, кинетических уравнений, теории ядерных реакторов, физики плазмы (А. Эйнштейн, Н. Н. Боголюбов, П. Дирак, В. С. Владимиров, В. П. Маслов) [1.5].

Основными математическими объектами в математической физике являются дифференциальные уравнения с частными производными, интегро-дифференциальные уравнения, а также интегральные уравнения.

Многие математические модели физических процессов представляют собой краевую или начально-краевую задачу для дифференциального или интегро-дифференциального уравнения. Основными классами таких задач являются эллиптические, гиперболические, параболические задачи и задача Коши. Среди постановок данных задач различают классические и обобщенные постановки.

Одной из проблем, изучаемых в математической физике, является задача на собственные значения. Собственные функции конкретных операторов и разложения по ним в ряды Фурье решений задач часто используются при теоретическом анализе задач, а также для построения их решений (метод собственных функций).

Основными инструментами исследования задач математической физики служат теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория функций и теоремы сложения, методы функционального анализа, приближенные методы и вычислительная математика.

Многие задачи классической математической физики сводятся к краевым задачам для дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений — уравнений математической физики, которые совместно с соответствующими краевыми условиями образуют математические модели рассматриваемых физических процессов. Основными математическими средствами исследования этих задач служит теория дифференциальных уравнений с частными производными, интегральных уравнений, теория функций и функциональных пространств, функциональный анализ, приближенные методы и вычислительная математика.

Глава 1

Виды полей и их математическое описание

1.1. Виды полей и их характеристики

В учебном пособии рассматривается математический аппарат, используемый при анализе и расчете разных типов полей, встречающихся в инженерной практике. В ряде случаев жертвуется математической строгостью, если она не содействует выяснению физической сущности задачи. Важнее донести до читателя физическое представление о разнообразных уравнениях полей, а также помочь читателю уяснить физическую сущность математического аппарата, применяемого для решения соответствующих уравнений.

Книга не ставит своей целью познакомить читателя со всеми видами полей современной физики. Основной упор делается на поля потенциальные и электромагнитные.

Поле можно рассматривать как особое свойство материи. Оно характеризуется функциями, которые можно измерить. Так, электромагнитное поле характеризуется четырьмя векторными функциями: $\vec{E}$ — напряженностью электрического поля; $\vec{D}$ — электрической индукцией; $\vec{H}$ — напряженностью магнитного поля; $\vec{B}$ — магнитной индукцией.

Определить электромагнитное поле в некоторой области пространства — значит указать эти функции в любой ее точке. В свою очередь, гидродинамическое поле в каждой точке среды характеризуется двумя векторными функциями — скоростью $\vec{V}$ и плотностью $\vec{\rho}$ и одной скалярной функцией — давлением P .

С математической точки зрения любое поле представляет собой систему функций от координат точки в пространстве. Поле есть некоторая удобная математическая идеализация физической ситуации, в которой протяженность является существенным элементом, т. е. которая не может быть исследована в терминах положения конечного числа частиц. Например, поперечное отклонение струны, находящейся под воздействием статических сил, от ее положения равновесия представляет собой пример одномерного поля. Отклонение u можно рассматривать как функцию расстояния x вдоль струны. Плотность, температуру и давление в воздушной или жидкой среде, где распространяются звуковые волны, можно рассматривать в функции трех координат и времени. Такие поля принято называть материальными полями.

Другие поля являются конструкциями, позволяющими изучать проблему действия на расстоянии, в которой относительное движение и положение одного тела влияют на движение и положение другого тела. Потенциальные и силовые, электромагнитные и гравитационные поля служат примерами таких полей. Считают, что такие поля вызваны некоторым количеством материи, а значение поля в некоторой точке рассматривают как меру воздействия этого количества материи на некоторое пробное тело, помещенное в рассматриваемой точке. В последнее время стало очевидным, что многие из этих полей также являются лишь приближенной идеализацией действительной физической ситуации, так как они не учитывают различных квантовых законов, которым подчиняется материя.

В большинстве случаев рассматриваемые в учебном пособии поля оказываются решениями дифференциальных уравнений с частными производными, чаще всего линейных уравнений второго порядка, однородных или неоднородных. Получение уравнений часто связано с упрощением действительной физической модели. Как правило, такие упрощения оправданы [1.1].

Стремление описать реальную физическую задачу с помощью дифференциальных уравнений с частными производными приводит к тому, что получаемые поля оказываются одновременно и более и менее правильными, чем «реальные» состояния. Решение дифференциального уравнения обладает в области исследования большей степенью гладкости, чем соответствующая физическая задача, но математически оно обычно имеет конечное число разрывов, значительно более существенных, чем те, которые реально имеют место. Если упрощение было не слишком значительным, то большинство величин, которые могут быть вычислены с помощью аналитической модели поля, достаточно хорошо соответствует их измеренным значениям. В каждом случае, однако, возможны некоторые расхождения между вычисленными и измеренными значениями, что можно объяснить либо «слишком гладким» поведением поля на большей части его протяжения, либо наличием в математически построенном поле разрывов и бесконечностей, отсутствующих в реальной задаче. Иногда эти расхождения тривиальны в том смысле, что внесение в конструкцию поля дополнительных усложнений с целью получить лучшее соответствие с экспериментом не приводит к принципиальному изменению сущности явления. В других случаях эти расхождения далеко не тривиальны, и изменения в теории, необходимые для достижения лучшего соответствия с экспериментом, затрагивают коренным образом основные понятия и определения.

Могут существовать поля скалярные, векторные, а в ряде случаев и тензорные, в зависимости от рода величины, распределение которой задается полем.

Если во всех точках поля скалярные, векторные или тензорные величины имеют одно и то же значение, то поле называется однородным, в противном случае — неоднородным. Поля физических величин могут не изменяться с течением времени — быть стационарными, а могут изменяться — быть нестационарными.

1.2. Скалярные поля

Пространство или его часть, каждой точке которого поставлено в соответствие определенное число, называется скалярным. Отклонения точек струны или мембраны от их положения равновесия представляют собой скалярные поля. Плотность, давление и температура жидкости, определенные через предельные отношения, также являются скалярными полями. Скалярные поля представляют собой сплошную среду.

Все скалярные поля обладают свойством инвариантности относительно преобразований пространственных координат. Численное значение поля в точке остается одним и тем же независимо от того, как выражены координаты этой точки. Форма математического выражения поля может меняться в зависимости от выбора системы координат.

Свойство инвариантности скалярного поля следует отличать от инвариантности формы некоторых уравнений относительно некоторых преобразований координат. Для таких скалярных полей, как поля плотности, температуры или электрического потенциала, свойство инвариантности совершенно очевидно из самого определения поля. Однако это не всегда так для менее простых полей. В некоторых случаях свойство инвариантности должно быть использовано как пробный камень, позволяющий найти правильное выражение для данного поля. Аналитически скалярные поля задаются с помощью функции $\Phi(\mu)$, где индекс μ — малая точка рассматриваемой области E .

Поверхности уровня. Поверхности, определенные уравнением $\Phi(\mu) = \text{const}$, где $\Phi(\mu)$ обозначает скалярное поле, называются поверхностями уровня. Поверхности уровня являются очевидными обобщениями линий уровня на топографической карте. В теории потенциала они называются эквипотенциальными поверхностями, в теории теплопроводности — изотермическими поверхностями и т. д. Они образуют семейство непересекающихся поверхностей, которые часто оказываются полезными в качестве одного из семейств координатных поверхностей, наиболее естественной для данной системы координат. Например, если полем является хорошо известный потенциал

$$\Phi(\mu) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-0.5},$$

то поверхностями уровня (в данном случае поверхностями постоянного потенциала) являются концентрические сферы радиуса $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{0.5} = \text{const}$, поэтому естественными координатами для этой задачи становятся сферические: r, θ, ϕ .

Частные производные скалярного потока $\Phi(x, y, z)$ по прямоугольным координатам x, y, z являются скоростями, с которыми изменяется поле при перемещении в пространстве. Например, главная часть изменения $\Phi(x, y, z)$ при перемещении из точки x, y, z в точку $(x + dx, y + dy, z + dz)$ равна

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz. \quad (1.1)$$

Если обе точки лежат на одной и той же поверхности уровня, то $d\Phi = 0$, и дифференциальное уравнение этих поверхностей имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0. \quad (1.2)$$

Смещение (dx, dy, dz) перпендикулярно к поверхности уровня, если составляющие смещения удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dx}{\partial \Phi / \partial x} = \frac{dy}{\partial \Phi / \partial y} = \frac{dz}{\partial \Phi / \partial z}. \quad (1.3)$$

Соотношения (1.3) являются дифференциальными уравнениями семейства кривых, называемых нормальными линиями, которые в каждой точке перпендикулярны к поверхности уровня, проходящей через эту точку. В сочетании с поверхностями уровня они могут быть использованы при определении естественной для данного поля системы координат. Например, для поля $\Phi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-0.5}$ поверхностями уровня являются (как было отмечено выше) сферы, а нормальными линиями — радиальные лучи, что наводит на мысль о сферических координатах r, θ, φ (хотя эти элементы и не определяют полностью эту систему).

Нормальные линии имеют направление наиболее быстрого изменения Φ . Небольшие вычисления, основанные на уравнениях (1.1) и (1.3), показывают, что изменение Φ при смещении на расстояние ds вдоль нормальной линии равно

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2} ds.$$

Квадратный корень в этом выражении называется величиной градиента Φ . Свойства градиента будут подробно рассмотрены несколько позже в настоящей главе.

Оператор Лапласа. Чрезвычайно важное свойство скалярного поля выражается посредством его вторых производных. В одномерном случае, когда Φ является поперечным отклонением струны от ее прямолинейного положения равновесия, вторая производная $d^2\Phi/dx^2$ непосредственно связана с разностью между значением Φ в точке x и средним значением Φ в соседних точках. С точностью до малых второго порядка включительно имеем

$$\begin{aligned} \Phi(x) - 0,5[\Phi(x-dx) + \Phi(x+dx)] &= \\ = -0,5\{\Phi[(x+dx) - \Phi(x)] - [\Phi(x) - \Phi(x-dx)]\} &= -0,5 \frac{d^2\Phi}{dx^2} (dx)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, если вторая производная отрицательна, Φ в точке x больше, чем среднее значение Φ в точках $x+dx$ и $x-dx$, так что график Φ будет обращен в точке x своей выпуклостью кверху. Если вторая производная равна нулю, то график Φ не искривлен.

Нетрудно видеть, что уравнение, описывающее форму натянутой гибкой струны, находящейся под воздействием поперечной силы $F(x)$, отнесенной к единице длины струны, должно содержать вторую производную. Действительно, чем больше поперечная сила в некоторой точке, тем больше должна быть кривизна струны в этой точке, для того чтобы натяжение T вдоль струны имело большую поперечную составляющую, которая уравнивает силу. Как показывает более подробное исследование (см., например, [1.2]), уравнение, описывающее форму струны, имеет вид:

$$T \frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -F(x).$$

Можно найти трехмерный аналог этой меры кривизны $\Phi(x, y, z)$. Разность между значением $\Phi(x, y, z)$ в точке и средним значением Φ в соседних точках оказывается равной $-(1/6)(dx dy dz)^2 \nabla^2 \Phi$, где

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (1.4)$$

является очевидным обобщением одномерного оператора второй производной.

Математическая операция образования правой части (1.4) обозначается символом ∇^2 (читается «набла квадрат») и называется оператором Лапласа. Результат этой операции, произведенной над функцией, называется лапласианом $\Phi(x, y, z)$. Если $\nabla^2 \Phi$ отрицателен в некоторой точке, то поле $\Phi(x, y, z)$ имеет тенденцию концентрироваться в этой точке. Прямым следствием этого высказывания является тот факт, что скалярная функция $\Phi(x, y, z)$ не может достигать своего максимального или минимального значения в области, в которой $\nabla^2 \Phi = 0$.

В математических курсах часто уравнение вида $\nabla^2 \Phi = 0$ называется однородным уравнением Лапласа в отличие от уравнения типа

$$\nabla^2 \Phi = -q, \quad (1.5)$$

которое называется неоднородным уравнением Лапласа. В инженерных курсах уравнение (1.5) часто называют уравнением Пуассона. Здесь функция $q(x, y, z)$, например, в электрическом поле, может представлять функцию источника.

1.3. Векторные поля

В разделе 1.2 рассмотрен ряд полей, характеризующихся в каждой точке одной-единственной величиной и называемых скалярными. Ряд других полей требуют для своего полного определения задания в каждой точке величины и направления. Это — векторные поля.

Таким образом, векторным полем можно назвать пространство или его часть, каждой точке M которого поставлен в соответствие вектор $\vec{A}(M)$. Такие поля называют стационарными. Например, сила, действующая на некоторую

массу жидкости в гравитационном или электрическом поле, является вектором, имеющим величину и направление. Предел отношения этой силы к объему, занимаемому той массой жидкости, на которую сила воздействует, при уменьшении этого объема определяет в каждой точке пространства некоторый вектор, задающий силовое поле.

Иногда векторное поле легче всего определяется через скалярное отношение, которое уже само учитывает направление. Например, в случае проводника, через который течет ток, можно представить себе инструмент, который измерял бы величину тока, проходящего через элемент площади dA с центром в некоторой точке проводника. Тогда мы нашли бы, что измеренный ток зависит не только от величины dA , но и от ориентации элемента dA . Измерения соответствовали бы формуле $JdA \cos \theta$, где θ — угол между нормалью к dA и некоторым направлением, характерным для данного распределения тока. Величиной вектора поля в данной точке будет, следовательно, J (плотность электрического тока), а его направлением будет то, от которого отсчитывается угол θ .

Векторные поля в трехмерном пространстве определяются заданием трех чисел в каждой точке: величины и двух углов, определяющих направление, или трех составляющих (компонент) вектора по трем осям координат.

В дальнейшем векторные величины будем обозначать латинскими буквами со стрелочками наверху — $\vec{A}, \vec{B}, \vec{D}, \dots$. Соответствующие буквы, набранные без стрелочек наверху, будут представлять величины соответствующих векторов (таким же образом будут обозначаться и скалярные величины). Составляющие $\vec{A}$ по трем осям координат будут обозначаться через A_x, A_y, A_z . Вектор единичной длины в направлении $\vec{A}$ обозначается через $\vec{a}$; единичные векторы в направлении осей x, y, z обозначаются, как обычно, через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Единичные векторы вдоль криволинейных осей координат будут обозначаться через $\vec{a}$ с индексом, указывающим соответствующую ось (например, в полярных координатах единичный вектор в направлении r обозначается через $\vec{a}_r$, в направлении θ — через $\vec{a}_\theta$ и т. д.). Если не оговорено, то используются правые системы координат: при вращении от x к y правый винт, расположенный вдоль оси z , будет иметь поступательное движение в положительном направлении оси z , или, что то же, наблюдатель, стоящий лицом к доске и видящий на ней ось x , направленную вправо, и ось y , направленную вверх, смотрит на плоскость xy со стороны положительных z .

В указанных обозначениях векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ удовлетворяют следующим общим соотношениям:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A\vec{a} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}, \\ \vec{A} + \vec{B} &= (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k},\end{aligned}\tag{1.6}$$

дающим определения составляющих и векторного сложения.

Векторы не инвариантны относительно замены координат в том же смысле, как скаляры, так как составляющие изменяются с изменением направления осей координат.

Свойства преобразований векторов: скалярного и векторного произведений и т. д. приведены в приложении 1.

Линии тока. Как уже указывалось, стационарное векторное поле определяется заданием вектора в каждой точке пространства, т. е. функцией координат x, y, z — $F(x, y, z)$. В большинстве интересующих нас случаев этот вектор является непрерывной функцией x, y, z (за исключением изолированных точек или особых линий). Там, где вектор непрерывен, можно определить линии тока поля, которые являются линиями, касательными в каждой точке к вектору в этой точке. Линии тока определяют семейство поверхностей.

Потенциальные поверхности. Линии тока могут определять другое семейство поверхностей, перпендикулярных к ним.

В качестве примера можно рассмотреть круговой цилиндрический проводник, по которому протекает электрический ток с одинаковой плотностью по сечению. Здесь токовые линии направлены по образующим цилиндра (по направлению электрического тока), образуя семейство линий тока. А потенциальными поверхностями являются сечения проводника (в каждом сечении проводника можно зафиксировать величину электрического потенциала).

1.4. Криволинейные координаты

До сих пор все рассматриваемые поля выражались через три прямоугольные декартовы координаты x, y, z (четвертая координата, время, будет рассмотрена позже). Векторные и скалярные поля всегда могут быть так выражены, но часто оказывается гораздо более удобным выразить их в других системах координат. Иногда оказывается возможным построить некоторую «естественную» для данного векторного поля систему координат, используя для этого линии тока и потенциальные поверхности. Во многих случаях природа поля определяется указанием его поведения на некоторой граничной поверхности или указанием характера и расположения его особенностей; при этом часто оказывается, что «естественная» для поля система координат каким-то простым образом связана с граничной поверхностью или с распределением особенностей (или и с тем и с другим). В этих «естественных» координатах выражение поля часто принимает простой и обозримый вид, тогда как в координатах x, y, z это выражение становится сложным, а необходимые вычисления — почти невыполнимыми. Поэтому целесообразно познакомиться с выражениями полей, а также операторов, действующих на них, в обобщенных трехмерных координатах.

При решении инженерных задач достаточно использовать ортогональные координаты, для которых три семейства координатных поверхностей взаимно перпендикулярны (задачи, требующие неортогональных координат, почти никогда не решаются точно, а техника их приближенного решения обычно использует решения в ортогональной системе координат).

Обобщенная система координат состоит из трех семейств поверхностей, уравнения которых в декартовой системе координат имеют вид $\xi_1(x, y, z) = \text{const}$, $\xi_2(x, y, z) = \text{const}$, $\xi_3(x, y, z) = \text{const}$. Эти равенства определяют ξ_1, ξ_2, ξ_3

как функции от x, y и z . Во многих случаях оказывается более удобным преобразовать уравнения и выразить x, y, z через ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Линии пересечения этих поверхностей образуют три семейства кривых линий. От точки (x, y, z) или (ξ_1, ξ_2, ξ_3) мы откладываем три единичных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, каждый из которых касателен к проходящей через эту точку соответствующей координатной линии криволинейной системы. Это новая тройка единичных векторов, через которые можно выразить векторное поле $\vec{F}(x, y, z)$. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеют единичную длину, т. е. ту же длину, что и векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Для ортогональных систем координат векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в каждой точке взаимно перпендикулярны.

Направляющие косинусы. Обозначим направляющие косинусы единичного вектора $\vec{e}_1$ относительно старых осей через $\gamma_{11} = \vec{e}_1 \cdot \vec{i}$, $\gamma_{12} = \vec{e}_1 \cdot \vec{j}$, $\gamma_{13} = \vec{e}_1 \cdot \vec{k}$; направляющие косинусы вектора $\vec{e}_2$ — через $\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23}$ и т. д. (см. таблицу косинусов).

Таблица косинусов

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{e}_1$	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}
$\vec{e}_2$	γ_{21}	γ_{22}	γ_{23}
$\vec{e}_3$	γ_{31}	γ_{32}	γ_{33}

В общем случае эти направляющие косинусы изменяются от точки к точке, так как $\gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{n3}$ ($n = 1, 2, 3$) являются функциями ξ_1, ξ_2, ξ_3 (рис. 1.1). В силу свойств направляющих косинусов имеем равенства

$$\gamma_{n1}^2 + \gamma_{n2}^2 + \gamma_{n3}^2 = 1, \quad n = 1, 2, 3,$$

справедливые для всех значений координат.

Если новые единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ взаимно перпендикулярны в каждой точке, то новая система координат ортогональна. В этом случае $\gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{n3}$ являются направляющими косинусами векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ относительно векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, и девять введенных направляющих косинусов симметричны относительно обеих систем координат.

Так как $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = 1$, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ и т. д., указанные соотношения между направляющими косинусами и единичными векторами приводят к ряду уравнений, связывающих значения γ_{nm} :

$$\sum_s \gamma_{ns} \gamma_{ms} = \sum_s \gamma_{sm} \gamma_{sn} = \delta_{nm} \quad (n, m = 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера, равный нулю, если $m \neq n$, и равный единице при $m = n$.

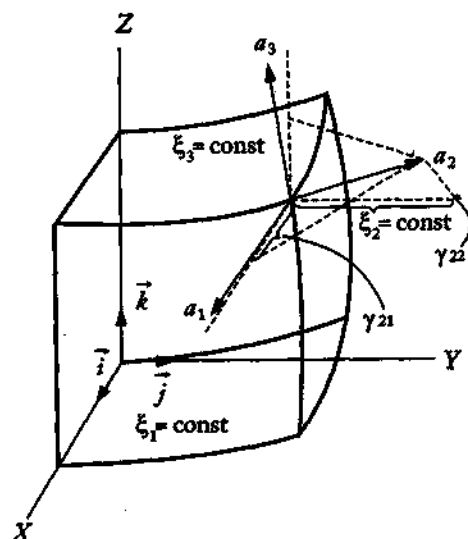


Рис. 1.1. Элемент криволинейной системы координат с единичными векторами $\vec{e}_n$ и направляющими косинусами γ_{nm}

Обращаясь к равенству, представляющему смешанное произведение трех векторов (см. приложение 1):

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix},$$

отмечаем, что если система координат ξ правая (система x, y, z предполагается правой), то определитель $|\gamma_{nm}|$ равен $+1$; если ξ образуют левую систему, то этот определитель равен -1 . Решая уравнения (1.7) относительно одного из γ , найдем, что

$$\gamma_{mn} = \pm M_{mn}, \quad (1.8)$$

где знак плюс имеет место в случае, когда ξ образуют правую систему координат, а знак минус, когда они образуют левую систему. Величина M_{mn} является алгебраическим дополнением γ_{mn} в определителе $|\gamma_{nm}|$:

$$M_{11} = \gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{23}\gamma_{32},$$

$$M_{12} = \gamma_{23}\gamma_{31} - \gamma_{21}\gamma_{33},$$

$$M_{31} = \gamma_{12}\gamma_{23} - \gamma_{13}\gamma_{22} \text{ и т. д.}$$

Следует, конечно, иметь в виду, что соотношения (1.7) и (1.8) остаются в силе и в том случае, когда речь идет о двух произвольных ортогональных системах, а не только о декартовой системе и одной произвольной ортогональной системе. В равенстве (1.8) знак плюс имеет место, если обе системы правые или обе левые; знак минус — если одна из них правая, а другая левая.

Если криволинейная система координат ортогональна, то любой вектор $\vec{F}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ может быть представлен разложением на составляющие по направлениям новых единичных векторов

$$\vec{F} = \sum_m F_m \vec{a}_m, \text{ где } F_m = \vec{F} \cdot \vec{a}_m.$$

Используя направляющие косинусы γ_{mn} , можно показать, что между этими составляющими и декартовыми составляющими $\vec{F}$ имеют место соотношения

$$F_m = \gamma_{m1}F_x + \gamma_{m2}F_y + \gamma_{m3}F_z, \quad (1.9)$$

$$F_x = \sum_m \gamma_{m1}F_m \text{ и т. д.}$$

Любая система трех величин, определенных относительно систем координат так, что выбору x, y, z соответствует тройка функций от x, y, z , а выбору ξ_1, ξ_2, ξ_3 соответствует другая тройка функций от ξ_1, ξ_2, ξ_3 , может рассматриваться как система составляющих некоторого вектора в том и только в том случае, когда эти две тройки функций связаны между собой соотношениями вида (1.9).

Коэффициенты Ламе. Проведенные выше рассмотрения не окажут, однако, существенной помощи, если значения направляющих косинусов в каждой точке остаются неизвестными. Как правило, задаются уравнения новых координатных поверхностей, используя которые необходимо вывести выражения для направляющих косинусов. Например, обычное определение сферических координат $z = \xi_1 \cos \xi_2$, $x = \xi_1 \sin \xi_2 \cos \xi_3$, $y = \xi_1 \sin \xi_2 \sin \xi_3$ не дает непосредственно коэффициенты, выраженные через ξ_1, ξ_2, ξ_3 (ξ_1 — сферическая координата r , ξ_2 — сферическая координата θ , ξ_3 — сферическая координата φ).

Необходимая связь между ними обычно устанавливается при помощи элемента дуги ds . Выражение квадрата элемента дуги ds имеет вид:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{n=1}^{n=3} h_n^2 d\xi_n^2.$$

Простая подстановка показывает, что

$$h_n^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_n} \right)^2 = \left[\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (1.10)$$

Величина h_n называется масштабным множителем для координаты ξ_n . Изменению $d\xi_n$ этой координаты соответствует смещение $h_n d\xi_n$ вдоль координатной линии. В общем случае h_n изменяется от точки к точке.

Отметим, что для вывода выражений коэффициентов h_1, h_2, h_3 через координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 необходимо выразить старые координаты x, y, z через новые ξ_1, ξ_2, ξ_3 , как это было сделано выше для сферических координат. Такой способ записи соотношений между двумя координатными системами наиболее целесообразно.

Направляющие косинусы осей ξ_n относительно осей x, y, z могут быть выражены через производные ξ по x, y, z или через производные x, y, z по ξ :

$$\begin{aligned}\gamma_{n1} &= \frac{1}{h_n} \frac{\partial x}{\partial \xi_n} = h_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x}, \quad \gamma_{n2} = \frac{1}{h_n} \frac{\partial y}{\partial \xi_n} = h_n \frac{\partial \xi_n}{\partial y}, \\ \gamma_{n3} &= \frac{1}{h_n} \frac{\partial z}{\partial \xi_n} = h_n \frac{\partial \xi_n}{\partial z},\end{aligned}\quad (1.11)$$

в зависимости от того, выражены ли x, y, z через ξ или ξ — через x, y, z .

Соотношения (1.11) полезны, но применяются редко.

Более подробные сведения о выводе коэффициентов Ламе для класса ортогональных криволинейных систем координат можно почерпнуть в [1.1]. Для наиболее распространенных в инженерных задачах систем координат коэффициенты Ламе приведены в приложении 1. При переразложении решений соответствующих уравнений математической физики из одной координатной системы в другую полезно воспользоваться [1.3–1.5].

Законы преобразования векторов. Для того чтобы функции точки могли служить тремя составляющими некоторого вектора, они должны преобразовываться в соответствии с правилами, содержащимися в соотношениях (1.9) и (1.11). Если преобразуются составляющие из одной криволинейной системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 с коэффициентами Ламе h_1, h_2, h_3 к другой системе ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 с коэффициентами Ламе h'_1, h'_2, h'_3 , то составляющие в новой системе должны выражаться через составляющие в старой системе формулами

$$F'_n = \sum_m \gamma_{nm} F_m, \quad (1.12)$$

где

$$\frac{h_m}{h'_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_n} = \gamma_{nm} = \frac{h'_n}{h_m} \frac{\partial \xi'_n}{\partial \xi_m}.$$

Так как $h_m d\xi_m$ и $h'_n d\xi'_n$ являются расстояниями, то новые составляющие F'_n измеряются в тех же единицах. Если при решении физической задачи оказывается, что некоторые три величины преобразуются согласно соотношениям (1.12), то можно с уверенностью считать, что найдены составляющие некоторого вектора. Поэтому соотношения (1.12) могут быть использованы для выяснения того, являются ли три величины составляющими некоторого вектора, или нет.

1.5. Основные операторы, используемые при анализе поля

Дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$. Действует по всем трем координатам. Будучи применен к скалярным или векторным полям, переводит их в другие поля. Получаемые таким образом поля являются мерой скорости изменения исходного поля от точки к точке.

Градиент. Скорость изменения скалярного поля $\phi(x, y, z)$ изображается вектором, направление которого совпадает с направлением наискорейшего возрастания ϕ , а величина равна этой максимальной скорости возрастания. Ранее было показано (см. формулу (1.1)), что изменение $\phi(x, y, z)$ при переходе из точки с радиусом-вектором $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ в соседнюю точку $\vec{A} + d\vec{s}$, где элементарное смещение $d\vec{s} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$, равно $d\phi = d\vec{s} \cdot \text{grad } \phi$, причем

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.13)$$

Если $d\vec{s}$ лежит на поверхности уровня $\phi(x, y, z) = \text{const}$, то $d\phi$ равно нулю, так что вектор $\text{grad } \phi$ перпендикулярен к поверхности уровня. Максимальное значение $d\phi$ соответствует $d\vec{s}$, перпендикулярному к этой поверхности, и в этом случае (как уже было отмечено)

$$d\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2} ds.$$

Величина, обозначаемая символами $\text{grad } \phi$ или $\vec{\nabla} \phi$ (читается «набла» ϕ), является мерой скорости изменения скалярного поля ϕ в точке (x, y, z) . Для того чтобы показать, что она является действительно вектором, необходимо установить, что она преобразуется в соответствии с формулами (1.12). Это нетрудно сделать, так как очевидно, что выражение градиента в криволинейных координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеет вид

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi = \frac{\vec{a}_1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + \frac{\vec{a}_2}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} + \frac{\vec{a}_3}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3}. \quad (1.14)$$

Если теперь преобразовать (1.14) к другой системе координат ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 , предполагая, что оно является вектором, можно прийти к той же форме в новых координатах. В самом деле, при использовании соотношения (1.12) и тождества

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi'_n} = \sum_m \frac{\partial \phi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_n}$$

получается

$$\vec{\nabla} \phi = \sum_m \frac{\vec{a}_m}{h_m} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_m} = \sum_n \vec{a}'_n \sum_m \left(\frac{1}{h_m} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_m} \right) \left(\frac{h_m}{h'_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_n} \right) = \sum_n \frac{\vec{a}'_n}{h'_n} \frac{\partial \phi}{\partial \xi'_n},$$

как и должно быть, если $\text{grad } \phi$ есть вектор, выражаемый в любой системе ортогональных координат формулой (1.14).

Отметим, что $\text{grad } \phi$ является истинным вектором. Это доказывается тем, что $d\phi = \text{grad } \phi \cdot d\vec{s}$ является истинным скалярным инвариантом. Так как $d\vec{s}$ — истинный вектор, $\text{grad } \phi$ также должен быть истинным вектором. Заметим также, что циркуляция градиента равна нулю

$$\oint \text{grad } \phi \cdot d\vec{s} = \oint d\phi = 0.$$

Этим рассуждением подчеркивается, что если некоторая физическая величина выражена через коэффициенты Ламе h_a в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 , то в другой системе координат ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 она должна выразиться формулой того же вида через коэффициенты h'_a .

Производная по направлению. В дальнейшем изложении будет встречаться величина $\vec{B} \cdot \text{grad } \phi$. Если $\vec{B}$ — единичный вектор, эта величина называется производной $\phi(x, y, z)$ по направлению единичного вектора $\vec{B}$ и представляет собой скорость изменения $\phi(x, y, z)$ в направлении $\vec{B}$. Независимо от того, является ли $\vec{B}$ единичным вектором, или нет,

$$\vec{B} \cdot \text{grad } \phi = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \phi = B_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + B_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + B_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{B_1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + \frac{B_2}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} + \frac{B_3}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3}.$$

Скалярный оператор $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) = (\vec{B} \cdot \text{grad})$ может быть также приложен к вектору, что дает

$$(\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A} = \vec{i} (\vec{B} \cdot \text{grad } A_x) + \vec{j} (\vec{B} \cdot \text{grad } A_y) + \vec{k} (\vec{B} \cdot \text{grad } A_z).$$

В криволинейных координатах это выражение становится более сложным, потому что единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ также являются переменными (см. приложение 1).

Дивергенция. Рассмотрим две дифференциальные операции, приложения которых к векторному полю играют важную роль. Одна приводит к скалярной характеристике, которая указывает скорость изменения числа линий тока, другая — к векторной, указывающей степень закрученности линий тока.

Первая операция может быть получена предельным переходом из потока вектора при стягивании замкнутой поверхности в точку, а вторая — аналогичным процессом, примененным к циркуляции.

Чтобы получить указанную скалярную характеристику, необходимо сначала вычислить поток векторного $\vec{F}(x, y, z)$ изнутри элемента объема $dx dy dz$ с центром в точке (x_0, y_0, z_0) . Разлагая в ряд Тейлора x -составляющую $\vec{F}(x, y, z)$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , найдем

$$F_x(x, y, z) = F_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F_x}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F_x}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F_x}{\partial z}(z - z_0) + \dots$$

Здесь $\partial F_x / \partial x$ и т. д. обозначают значения производных в точке (x_0, y_0, z_0) .

Поверхностный интеграл нормальной составляющей $\vec{F}(x, y, z)$ по грани 1 (рис. 1.2) равен

$$\iint_1 F_x ds = dy dz [F_x(x_0, y_0, z_0)] + 0,5 \frac{\partial F_x}{\partial x} dx + \text{высшие степени дифференциалов.}$$

Поверхностный интеграл по грани 2 равен

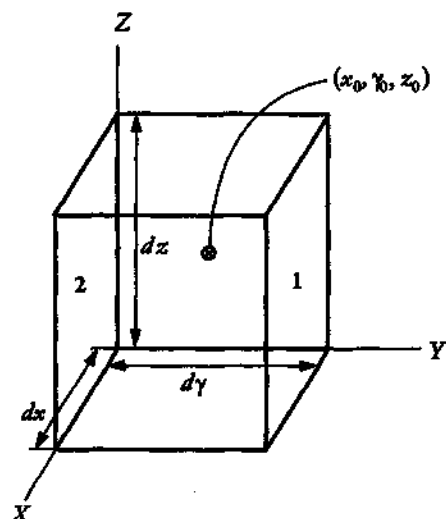


Рис. 1.2. Поток вектора и дивергенция векторного поля

$$-\iint_2 F_x ds = -dydz [F_x(x_0, y_0, z_0) - 0,5 \frac{\partial F_x}{\partial x} dx + \text{высшие степени дифференциалов},$$

причем знак минус перед интегралом и перед скобками объясняется тем, что интегрируется составляющая $\vec{F}(x, y, z)$ по направлению внешней нормали, которая на грани 2 равна $-\vec{F}_x(x, y, z)$. Сумма поверхностных интегралов по этим двум граням равна $(\partial F_x / \partial x) dx dy dz$, если пренебречь величинами высших порядков малости. Аналогичные выражения получаются для двух других пар противоположных граней, так что с точностью до величин высших порядков малости

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{A} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Это выражение является векторным аналогом дифференциала du скалярной функции $u(x)$ одной переменной x . Аналогом производной является поток, отнесенный к единице объема в точке (x, y, z) . Эта скалярная величина называется дивергенцией векторного поля $\vec{F}(x, y, z)$ в точке (x, y, z) и обозначается через

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{A}}{\Delta V} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}. \quad (1.15)$$

Дивергенция равна скорости нарастания числа линий тока, отнесенной к единице объема ΔV .

В соответствии с приведенным основным определением, дивергенция поля $\vec{F}(x, y, z)$ в точке P является свойством поля $\vec{F}(x, y, z)$, характеризующим его поведение в окрестности P ; значение дивергенции не должно зависеть от выбора системы координат. Можно, конечно, предполагать, что выражение опера-

тора дивергенции в обобщенных криволинейных координатах будет иметь математическую форму, отличную от его выражения в декартовых координатах; тем не менее численное значение $\operatorname{div} \vec{F}$ в точке P должно быть одним и тем же в любых системах координат. Если преобразование координат состоит только в повороте и не связано с растяжением или сжатием (т. е. если все h равны единице), то не только значение дивергенции, но и форма ее выражения должна оставаться неизменной. В конечном счете это и понимается под скалярным инвариантом.

Нахождение выражения дивергенции в обобщенных координатах не представляет принципиальных трудностей и здесь опускается. Желющие могут познакомиться с соответствующими выкладками по [1.1].

Ротор (вихрь). Ротор векторного поля $\vec{F}(x, y, z)$ является дифференциальным оператором, который преобразует один вектор в другой. Этот оператор, являющийся мерой «завихренности» векторного поля, так же связан с интегралом циркуляции, как оператор дивергенции связан с интегралом потока. Чтобы найти завихренность векторного поля в точке P , необходимо вычислить циркуляцию вокруг элемента площади, содержащего P , и разделить ее на площадь элемента. Нетрудно обнаружить, что в этом случае предельный переход более сложен, чем при определении дивергенции, так как результат зависит от ориентации элемента площади. Например, если элемент площади перпендикулярен оси x , то интеграл циркуляции вдоль пути на рис. 1.3 равен

$$\begin{aligned} \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \oint_1 F_y dy + \int_2 F_z dz - \int_3 F_y dy - \int_4 F_z dz = \\ &= F_y(x_0, y_0, z_0) dy - \frac{\partial F_y}{\partial z} \frac{dz}{2} dy + F_z(x_0, y_0, z_0) dz + \frac{\partial F_z}{\partial y} \frac{dy}{2} dz - \\ &- F_y(x_0, y_0, z_0) dy - \frac{\partial F_y}{\partial z} \frac{dz}{2} dy - F_z(x_0, y_0, z_0) dz + \frac{\partial F_z}{\partial y} \frac{dy}{2} dz = \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) dy dz, \end{aligned}$$

где использованы первые члены ряда Тейлора для F_y и F_z . С другой стороны, циркуляция вокруг элемента, перпендикулярного оси y , равна

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) dx dz$$

и т. д. Если элемент параллелен оси z , но образует угол θ с осью x (как показано на рис. 1.4), то вычисление циркуляции несколько сложнее. Например, смещение ds вдоль пути 1 соответствует изменению $-ds \cos \theta$ абсциссы x и изменению $ds \sin \theta$ ординаты y . Аналогично в средней точке пути 2 F_z имеет значение

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = \frac{ds}{2} \cos \theta \cdot \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{ds}{2} \sin \theta \cdot \frac{\partial F_z}{\partial y}.$$

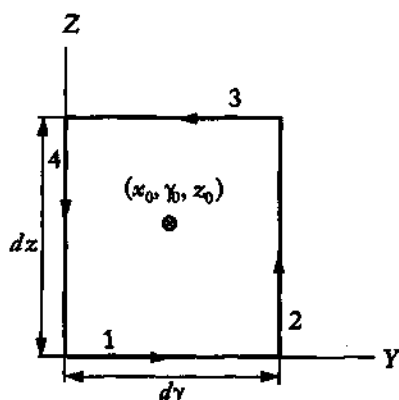


Рис. 1.3. Интеграл циркуляции и ротор векторного поля

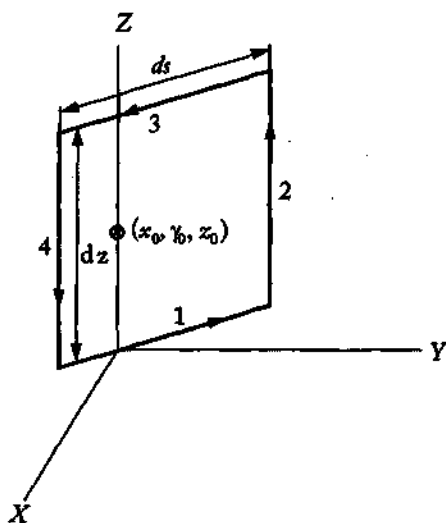


Рис. 1.4. Циркуляция под углом к оси

Принимая все это во внимание, найдем в данном случае для циркуляции выражение

$$\begin{aligned}
 & (F_y ds \sin \theta - F_x ds \cos \theta) - \frac{dz}{2} \left(ds \sin \theta \frac{\partial F_y}{\partial z} - ds \cos \theta \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \\
 & + F_z dz + \frac{dz}{2} \left(ds \sin \theta \frac{\partial F_z}{\partial y} - ds \cos \theta \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) - \\
 & - (F_y ds \sin \theta - F_x ds \cos \theta) - \frac{dz}{2} \left(ds \sin \theta \frac{\partial F_y}{\partial z} - ds \cos \theta \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -F_z dz + \frac{dz}{2} \left(ds \sin \theta \frac{\partial F_z}{\partial y} - ds \cos \theta \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) = \\
 & = \left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \sin \theta + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \cos \theta \right] dz ds.
 \end{aligned}$$

Циркуляция вокруг элемента произвольной ориентации в пространстве представляется еще более сложной формулой.

Однако все значительно упрощается, если рассматривать величины

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right),$$

как, соответственно, x, y, z — компоненты некоторого вектора. В самом деле тогда оказывается, что циркуляция вокруг элемента площади dA равна просто составляющей этого вектора по направлению, перпендикулярному к элементу, умноженной на dA . Так, например, направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к элементу, изображенному на рис. 1.4, равны $(\sin \theta, \cos \theta, 0)$, и составляющая указанного вектора по направлению этой прямой, умноженная на $ds dz$, как раз и дает полученный выше результат.

Таким образом определенный вектор называется ротором $\vec{F}(x, y, z)$ в точке $P(x, y, z)$:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{F}.$$

Циркуляция вокруг элемента площади dA равна, следовательно, $d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{F}$, где $d\vec{A}$ — аксиальный вектор, соответствующий элементу площади. Вектор $\text{rot } \vec{F}$ является мерой «завихренности» поля в точке x, y, z . Если $\vec{F}(x, y, z)$ — скорость в потоке жидкости, то направление $\text{rot } \vec{F}$ в точке $P(x, y, z)$ совпадает с направлением оси вращения жидкости, находящейся в окрестности P (согласованным по правилу правого винта с направлением самого вращения), а длина $\text{rot } \vec{F}$ равна удвоенной угловой скорости вращения этой части жидкости. Ротор является оператором, аналогичным векторному произведению, так же как дивергенция аналогична скалярному произведению. Отметим, что $\text{rot } \vec{F}$ является аксиальным вектором, если $\vec{F}$ — истинный вектор, так как интеграл циркуляции является скаляром, а $d\vec{A}$ — аксиальный вектор и, следовательно, $\text{rot } \vec{F}$ также должен быть аксиальным вектором.

Рассмотрение $\text{rot } \vec{F}$ в обобщенных координатах выходит за тематику книги и может быть изучено самостоятельно по [1.1].

Векторный оператор $\vec{\nabla}$. Так же как оператор дивергенции является аналогом скалярного произведения векторов, оператор ротора является аналогом векторного произведения. Чтобы сделать эту аналогию более понятной, можно определить векторный оператор $\vec{\nabla}$, называемый наблой, с составляющими, заданными формулой

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

В терминах этого оператора три дифференциальных оператора, рассмотренные в настоящем пункте, могут быть символически записаны в виде:

$$\operatorname{grad} \phi = \vec{\nabla} \phi, \operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}, \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}.$$

В приложении 1 приведены основные формулы, содержащие векторный оператор $\vec{\nabla}$ и используемые при решении полевых задач в инженерных дисциплинах.

1.6. Основные теоремы, используемые при преобразовании векторов

1.6.1. Теорема Остроградского–Гаусса

Свойство аддитивности потока и определение $\operatorname{div} \vec{F}$ позволяют получить очень важный и полезный метод вычисления потока изнутри любой области пространства. В силу свойства аддитивности поток изнутри всей области должен быть равен сумме потоков изнутри всех элементарных областей, заключенных внутри данной области. В силу равенства (1.15) интегралы по элементам объема dv могут быть записаны в виде $\operatorname{div} \vec{F} \cdot dv$, так что должна иметь место важная теорема дивергенции

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dv, \quad (1.16)$$

где тройной интеграл распространяется на всю область V , ограниченную поверхностью S , по которой распространяется интегрирование в поверхностном интеграле в левой части. Равенство (1.16) называется *теоремой Остроградского–Гаусса*.

Эта теорема подчеркивает тесную связь, которая должна существовать между поведением векторного поля на замкнутой поверхности и его поведением всюду внутри этой поверхности. Она соответствует довольно очевидному свойству линий тока: число линий тока, «выходящих» из замкнутой поверхности, должно быть равно числу таких линий, «начинающихся» внутри поверхности.

1.6.2. Теорема Стокса

Существует теорема о роторе, аналогичная теореме о дивергенции, выраженной формулой (1.16); теорема о роторе может быть выведена из его основного определения и свойства аддитивности интеграла циркуляции. Рассмотрим любую поверхность S , ограниченную замкнутой линией (или замкнутыми линиями) L , разобьем S на элементы dA и сложим все циркуляции вокруг этих элементов. По определению ротора эта сумма может быть записана в виде $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A}$, где $d\vec{A}$ — вектор, соответствующий dA , и где интегрирование

производится по всей поверхности S . Этот интеграл определяет число вихревых линий, пересекающих поверхность S . В то же время вследствие свойства

аддитивности интеграла циркуляции $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A}$ должен быть равен циркуляции по контуру (или контурам) L ,

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A}' = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (1.17)$$

Это — теорема Стокса, позволяющая вычислить циркуляцию по любому контуру. Выражение (1.17) является еще одним соотношением, связывающим поведение векторного поля на границе области с его поведением внутри области; в данном случае это соотношение устанавливает, что циркуляция по контуру должна быть равна «числу» линий, охватываемых контуром.

Для желающих вывести теоремы Остроградского–Гаусса и Стокса можно рекомендовать [1.4, с. 36].

1.6.3. Теорема Грина

Система уравнений, описывающих векторное поле, приводится к дифференциальному уравнению при заданных граничных условиях, решение которого необходимо найти. Чаще всего решение находят методом разделения переменных исходного уравнения и разложения по собственным функциям. Такой метод приводит к цели прямым путем, если только можно найти подходящую для рассматриваемых границ систему координат, допускающую разделение переменных в рассматриваемом уравнении с частными производными. Однако результат обычно получается в виде бесконечного ряда, который часто сходится довольно медленно, что затрудняет общий анализ поведения решения в целом, его особенностей у краев и т. д. Для некоторых видов задач более желательно иметь решение в замкнутой форме, хотя бы в форме интеграла, включающего замкнутые функции.

В этом случае используют функции Грина. Этот метод физически очевиден. Для получения поля, порожденного некоторым распределением источников (зарядов, источников тепла и т. д.), подсчитывают эффект от каждой элементарной части источника и складывают все эти эффекты. Если $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ представляет собой поле в точке наблюдения $\vec{r}$, порожденное единичным точечным источником в точке источника $\vec{r}_0$, то поле в $\vec{r}$, порожденное совокупностью источников, распределенных с плотностью $\rho(\vec{r}_0)$, равно интегралу от $G \cdot \rho$ по всей области изменения $\vec{r}_0$, занятой источником. Функция G называется функцией Грина.

Функция Грина $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ зависит от положения двух точек: точки наблюдения, в которой поле измеряется, имеющей радиус-вектор $\vec{r}$ и координаты x, y, z наблюдателя, и точки источника, в которой помещается единичный источник, имеющий радиус-вектор $\vec{r}_0$ и координаты источника x_0, y_0, z_0 .

Чтобы получить вполне строгий вывод свойств функции Грина, можно воспользоваться вариантом теоремы Остроградского–Гаусса. Для любой замкнутой поверхности S эта теорема, записанная формулой (1.16), утверждает, что поток любого «достаточно гладкого» векторного поля через поверхность S

(наружу) равен интегралу от дивергенции этого поля по всему объему, заключенному внутри S . Под «достаточной гладкостью» понимается то, что вектор не должен иметь разрывов в величине или в производной на S и что дивергенция интегрируема.

Рассмотрим теперь две «достаточно гладкие» скалярные функции $U(\vec{r})$ и $V(\vec{r})$. По ним построим векторную характеристику $U \text{ grad } V$. Теорема Остроградского–Гаусса утверждает, что поток этого векторного поля через S равен интегралу от дивергенции $U \text{ grad } V$ по объему, заключенному внутри S . Так как

$$\text{div}(U \text{ grad } V) = (\text{grad } U) \cdot (\text{grad } V) + U \vec{\nabla}^2 V,$$

то в указанных выше обозначениях имеем (где $d\vec{A}$ направлено наружу из области, заключенной внутри границы)

$$\oint_L U \text{ grad } V \cdot d\vec{A} = \iiint_V (\text{grad } U \cdot \text{grad } V) dv + \iiint_V U \vec{\nabla}^2 V dv. \quad (1.18)$$

Однако можно получить такое же соотношение для другого вектора $V \text{ grad } U$. Вычитая одно из другого, получаем:

$$\oint_L [U \text{ grad } V - V \text{ grad } U] \cdot d\vec{A} = \iiint_V [U \vec{\nabla}^2 V - V \vec{\nabla}^2 U] dv, \quad (1.19)$$

где поверхностный интеграл берется от наружной нормальной компоненты вектора, заключенного в квадратные скобки, по замкнутой поверхности S , а объемный интеграл берется от скалярной величины в квадратных скобках по всему объему внутри S . Граничная поверхность может быть конечной (по протяженности) или бесконечной.

Соотношение (1.19) между поверхностным и объемным интегралами называется теоремой Грина. Формально она является частным случаем теоремы Остроградского–Гаусса.

1.7. Типовые дифференциальные уравнения, описывающие поля

1.7.1. Дифференциальные уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения 2-го порядка с несколькими независимыми переменными. Рассмотрим сначала дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными.

Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y называется соотношение между неизвестной функцией $A(x, y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно:

$$F\left(x, y, A, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\right) = 0. \quad (1.20)$$

Аналогично записывается уравнение и для большего числа независимых переменных.

Уравнение (1.20) называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет вид

$$a_{11} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + F_1\left(x, y, A, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}\right) = 0, \quad (1.21)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y .

Если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят не только от x и y , а являются, подобно F_1 , функциями $x, y, A, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}$, то такое уравнение называется *квазилинейным*.

Уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}$, так и относительно функции A и ее первых производных $\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}$:

$$a_{11} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial A}{\partial x} + b_2 \frac{\partial A}{\partial y} + cA + f = 0, \quad (1.22)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ — функции только x и y .

Если коэффициенты уравнения (1.22) не зависят от x и y , то оно представляет собой линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Уравнение называется *однородным*, если $f(x, y) = 0$. С помощью преобразования переменных

$$\xi = \phi(x, y), \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование, можно получить новое уравнение, эквивалентное исходному. Естественно поставить вопрос: как выбрать ξ и η , чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму?

Дадим ответ на поставленный вопрос для уравнений, линейных относительно старших производных вида (1.20), с двумя независимыми переменными x и y :

$$a_{11} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + F\left(x, y, A, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}\right) = 0.$$

Преобразуя производные к новым переменным, получаем:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial A}{\partial \eta} \eta_x,$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial A}{\partial \eta} \eta_y,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \xi_x^2 + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} \xi_x \eta_x + \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \eta_x^2 + \frac{\partial A}{\partial \xi} \xi_{xx} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \eta_{xx}, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \xi_x \xi_y + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \eta_x \eta_y + \frac{\partial A}{\partial \xi} \xi_{xy} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \eta_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \xi_y^2 + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} \xi_y \eta_y + \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \eta_y^2 + \frac{\partial A}{\partial \xi} \xi_{yy} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \eta_{yy},$$

где

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}; \quad \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\xi_{xx} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \eta_{xx} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad \xi_{xy} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}, \quad \eta_{xy} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

Подставляя значения производных из (1.23) в уравнение (1.21), получим:

$$\bar{a}_{11} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + 2\bar{a}_{12} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{a}_{22} \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + \bar{F} = 0, \quad (1.24)$$

где

$$\bar{a}_{11} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2,$$

а функция $\bar{F}$ не зависит от вторых производных. Заметим, что если исходное уравнение линейно, т. е.

$$F\left(x, y, A, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}\right) = b_1 \frac{\partial A}{\partial x} + b_2 \frac{\partial A}{\partial y} + cA + f,$$

то $\bar{F}$ имеет вид

$$\bar{F}\left(\xi, \eta, A, \frac{\partial A}{\partial \xi}, \frac{\partial A}{\partial \eta}\right) = \beta_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} + \beta_2 \frac{\partial A}{\partial \eta} + \gamma A + \delta,$$

то есть уравнение остается линейным. Отметим, что если преобразование переменных линейно, то $F = F_1$, так как вторые производные от ξ и η в форму-

лах (1.23) равны нулю и $\bar{F}$ не получает дополнительных слагаемых от преобразования вторых производных.

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент $\bar{a}_{11}$ был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка

$$a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (1.25)$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ — какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент $\bar{a}_{11}$ будет равен нулю. Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (1.25).

Докажем следующие леммы

1. Если $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения

$$a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0,$$

то соотношение $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0. \quad (1.26)$$

2. Если $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0,$$

то функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.6).

Докажем первую лемму. Поскольку функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.25), то, разделив (1.25) на $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$, получим равенство

$$a_{11} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} = 0, \quad (1.27)$$

где $\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$, которое является тождеством, так как удовлетворяется для всех x, y в той области, где задано решение. Соотношение $\varphi(x, y) = C$ является общим интегралом уравнения (1.26), если функция y , определенная из неявного соотношения $\varphi(x, y) = C$, удовлетворяет уравнению (1.26). Пусть уравнение $\varphi(x, y) = C$ определяет неявную функцию $y = y(x)$. Подставив ее

в $\Phi(x, y) = C$, получим тождество $\Phi(x, y(x)) = 0$. Продифференцируем обе части этого тождества по x . Получим $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$, откуда следует

$$\frac{dy}{dx} = - \left[\frac{\Phi_x(x, y)}{\Phi_y(x, y)} \right]_{y=f(x, C)}, \quad (1.28)$$

где скобки и значок $y = f(x, C)$ указывают, что в правой части равенства (1.28) переменная y не является независимой переменной, а имеет значение, равное $f(x, C)$. Отсюда следует, что $y = f(x, C)$ удовлетворяет уравнению (1.26), так как

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = \left[a_{11} \left(- \frac{\Phi_x}{\Phi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(- \frac{\Phi_x}{\Phi_y} \right) + a_{22} \right]_{y=f(x, C_0)} = 0,$$

поскольку выражение в квадратных скобках равно нулю при всех значениях x, y , а не только при $y = f(x, C)$.

Докажем вторую лемму. Пусть $\Phi(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (1.26). Докажем, что

$$a_{11}\Phi_x^2 + 2a_{12}\Phi_x\Phi_y + a_{22}\Phi_y^2 = 0 \quad (1.27')$$

для любой точки (x, y) . Пусть (x_0, y_0) — какая-нибудь заданная точка. Если мы докажем, что в ней удовлетворяется равенство (1.27'), то отсюда в силу произвольности (x_0, y_0) будет следовать, что равенство (1.27') есть тождество и функция $\Phi(x, y)$ является решением уравнения (1.27'). Проведем через точку (x_0, y_0) интегральную кривую уравнения (1.26), полагая $\Phi(x_0, y_0) = C_0$, и рассмотрим кривую $y = f(x, C_0)$. Очевидно, что $y_0 = f(x_0, C_0)$. Для всех точек этой кривой имеем:

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = \left[a_{11} \left(- \frac{\Phi_x}{\Phi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(- \frac{\Phi_x}{\Phi_y} \right) + a_{22} \right]_{y=f(x, C_0)} = 0.$$

Полагая в последнем равенстве $x = x_0$, получим:

$$a_{11}\Phi_x^2(x_0, y_0) + 2a_{12}\Phi_x(x_0, y_0)\Phi_y(x_0, y_0) + a_{22}\Phi_y^2(x_0, y_0) = 0,$$

что и требовалось доказать. Установленная связь уравнений (1.25) и (1.26) эквивалентна известной связи [1.5] между линейным уравнением с частными производными 1-го порядка и системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом нетрудно убедиться, разлагая левую часть уравнения (1.25) в произведение двух линейных дифференциальных выражений.

Уравнение (1.26) называется **характеристическим** для уравнения (1.21), а его интегралы — **характеристиками**.

Полагая что $\xi = \Phi(x, y)$, где $\Phi(x, y) = \text{const}$, есть общий интеграл уравнения (1.26), обращаем в нуль коэффициент при $\partial^2 A / \partial \xi^2$. Если $\Phi(x, y) = \text{const}$ является другим общим интегралом уравнения (1.26), независимым от $\Phi(x, y)$, то, полагая $\eta = \Phi(x, y)$, обратим в нуль также и коэффициент при $\partial^2 A / \partial \eta^2$.

Уравнение (1.26) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad (1.29)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (1.30)$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (1.21):

$$a_{11} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + F\left(x, y, A, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}\right) = 0.$$

Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением:

- *гиперболического типа*, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,
- *эллиптического типа*, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,
- *параболического типа*, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2, \quad D = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как функциональный определитель (якобиан) D преобразования переменных отличен от нуля. В различных точках области определения уравнения может принадлежать различным типам.

Рассмотрим область G , во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа — комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. Для уравнения гиперболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и правые части уравнений (1.29) и (1.30) действительны и различны. Общие интегралы их $\Phi(x, y) = C$ и $\Psi(x, y) = C$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая

$$\xi = \Phi(x, y), \quad \eta = \Psi(x, y),$$

приводим уравнение (1.24) после деления на коэффициент при $\frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta}$ к виду

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi \left(\xi, \eta, A, \frac{\partial A}{\partial \xi}, \frac{\partial A}{\partial \eta} \right), \quad (1.31)$$

где

$$\Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}.$$

Это — так называемая **каноническая** форма уравнений гиперболического типа. Часто пользуются второй **канонической** формой. Положим

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta,$$

то есть

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

где α и β — новые переменные. Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \right), \quad \frac{\partial A}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \right), \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \beta^2} \right).$$

В результате уравнение (1.31) примет вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \beta^2} = \Phi_1 \left(\alpha, \beta, A, \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right).$$

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ уравнения (1.29) и (1.30) совпадают, и получается один общий интеграл уравнения (1.26): $\Phi(x, y) = \text{const}$. Положим в этом случае

$$\xi = \Phi(x, y) \text{ и } \eta = \eta(x, y),$$

где $\eta(x, y)$ — любая функция. При таком выборе переменных коэффициент

$$\bar{a}_{11} = a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0,$$

так как $a_{12} = \sqrt{a_{11}} \sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

После деления уравнения (1.24) на коэффициент при $\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\xi, \mu, A, \frac{\partial A}{\partial \xi}, \frac{\partial A}{\partial \eta} \right), \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}.$$

Если в правую часть не входит $\frac{\partial A}{\partial \xi}$, то это уравнение будет обыкновенным дифференциальным уравнением, зависящим от ξ , как от параметра.

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и правые части уравнений (1.29) и (1.30) комплексны. Пусть $\varphi(x, y) = C$ — комплексный интеграл уравнения (1.29). Тогда $\varphi^*(x, y) = C$, где φ^* — сопряженная к φ функция, будет представлять собой общий интеграл сопряженного уравнения (1.30). Перейдем к комплексным переменным, полагая $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \varphi^*(x, y)$. При этом уравнение эллиптического типа приводится к такому же виду, что и гиперболическое.

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные α и β , равные

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

так что

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 &= \left(a_{11} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \right) - \\ &- \left(a_{11} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + 2i \left[a_{11} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + a_{12} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + a_{22} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right] = 0, \end{aligned}$$

то есть

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} \text{ и } \bar{a}_{12} = 0.$$

Уравнение (1.24) после деления на коэффициент при $\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2}$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \beta^2} = \Phi \left(\alpha, \beta, A, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y} \right), \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}.$$

Подобное преобразование законно только в том случае, если коэффициенты уравнения (1.21) — аналитические функции. Действительно, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то правые части уравнений (1.29) и (1.30) комплексны, а, следовательно, функция y должна иметь комплексные значения. О решении

этих уравнений можно говорить лишь в том случае, когда коэффициенты $a_k(x, y)$ определены для комплексных значений y . При приведении уравнения эллиптического типа к канонической форме ограничимся случаем аналитических коэффициентов.

Таким образом, в зависимости от знака выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ имеют место следующие канонические формы уравнения (1.21):

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \text{ (гиперболический тип)} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \Phi \quad (1.21^*)$$

$$\text{или } \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \Phi, \quad (1.21^{**})$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \text{ (эллиптический тип)} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \Phi, \quad (1.21^{***})$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \text{ (параболический тип)} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \Phi. \quad (1.21^{****})$$

1.7.2. Дифференциальные уравнения второго порядка со многими независимыми переменными

Рассмотрим линейное уравнение с действительными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial A}{\partial x_i} + cA = f = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (1.32)$$

где a_{ij}, b_i, c, f являются функциями $x_1, x_2, \dots, x_n$. Введем новые независимые переменные ξ_k , полагая

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial A}{\partial \xi_k} \alpha_{ik}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial A}{\partial \xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

Подставляя выражения для производных в исходное уравнение, получим:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \frac{\partial A}{\partial \xi_k} + cA = f = 0,$$

где

$$\bar{a}_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jk}, \quad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (\xi_k)_{x_i x_j}.$$

Рассмотрим квадратическую форму

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 y_i y_j, \quad (1.33)$$

коэффициенты которой равны коэффициентам α_{ij} исходного уравнения в некоторой точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Производя над переменными y линейное преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \eta_k,$$

получим для квадратической формы новое выражение

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 \eta_i \eta_j,$$

где

$$\bar{a}_{ij}^0 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl}^0 \alpha_{ik} \alpha_{jl}.$$

Таким образом, коэффициенты главной части уравнения изменяются аналогично коэффициентам квадратической формы при линейном преобразовании.

Как известно, выбором соответствующего линейного преобразования можно привести матрицу (a_{ij}^0) квадратической формы к диагональному виду, в котором $|\bar{a}_{ii}^0| = 1$, либо 0 ; $a_{ij}^0 = 0$, $i \neq j, i = 1, 2, n$.

Согласно закону инерции число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов $\bar{a}_{ii}^0$ в каноническом виде квадратичной формы инвариантно относительно линейного преобразования.

Назовем уравнение (1.32) в точке M_0 уравнением *эллиптического* типа, если все n коэффициентов $\bar{a}_{ii}^0$ одного знака; *гиперболического* типа (или нормального гиперболического типа), если $n-1$ коэффициентов $\bar{a}_{ii}^0$ имеют одинаковый знак, а один коэффициент противоположен им по знаку; *ультрагиперболического* типа, если среди $\bar{a}_{ii}^0$ имеется m коэффициентов одного знака и $n-m$ противоположного знака ($m, n-m > 1$); *параболического* типа, если хотя бы один из коэффициентов $\bar{a}_{ii}^0$ равен нулю.

Выбирая новые независимые переменные ξ_i так, чтобы в точке M_0

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = a_{ik}^0,$$

где a_{ik}^0 — коэффициенты преобразования, приводящего квадратическую форму (1.33) к каноническому виду (например, полагая $\xi_k = \sum \alpha_{ik}^0 x_i$), получим, что

в точке M_0 уравнение в зависимости от типа приводится к одной из следующих канонических форм:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 A}{\partial x_n^2} + \Phi &= 0 \quad (\text{эллиптический тип}); \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} &= \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} + \Phi \quad (\text{гиперболический тип}); \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} &= \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} + \Phi \quad (m > 1, n - m > 1) \quad (\text{ультрагиперболический тип}); \\ \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} &+ \Phi = 0 \quad (m > 0) \quad (\text{параболический тип}). \end{aligned}$$

Таким образом, если уравнение (1.32) в некоторой точке M принадлежит к определенному типу, то его можно привести к соответствующей канонической форме в этой точке.

Рассмотрим подробнее вопрос о том, можно ли привести уравнение к канонической форме в некоторой окрестности точки M , если во всех точках этой окрестности уравнение принадлежит к одному и тому же типу.

Для приведения уравнения в некоторой области к каноническому виду пришлось бы функции $\xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ подчинить дифференциальным соотношениям $\bar{a}_k = 0$, для $k \neq l$. Число этих условий, равное $0,5n(n-1)$, превосходит n — число определяемых функций ξ_i при $n > 3$. Для $n = 3$ недиагональные элементы матрицы $(\bar{a}_k)$, вообще говоря, можно было бы обратить в нули, но при этом диагональные элементы могут оказаться различными.

Следовательно, при $n \geq 3$ уравнение нельзя привести к каноническому виду в окрестности точки M . При $n = 2$ можно обратить в нуль единственный недиагональный коэффициент и удовлетворить условию равенства двух диагональных коэффициентов, что и было сделано в разделе 1.7.1.

Если коэффициенты уравнения (1.32) постоянны, то, приводя (1.32) к канонической форме в одной точке M , получим уравнение, приведенное к канонической форме во всей области определения уравнения.

1.7.3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

В случае двух независимых переменных линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_{11} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial A}{\partial x} + b_2 \frac{\partial A}{\partial y} + cA + f(x, y) = 0. \quad (1.34)$$

Ему соответствует характеристическое уравнение с постоянными коэффициентами. Поэтому характеристики будут прямыми линиями

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_1, \quad y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_2,$$

если дискриминант больше нуля.

С помощью соответствующего преобразования переменных уравнение (1.34) приводится к одной из простейших форм:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + b_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial A}{\partial \eta} + cA + f = 0;$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} + b_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial A}{\partial \eta} + cA + f = 0 \quad (\text{эллиптический тип}); \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + b_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial A}{\partial \eta} + cA + f = 0 \quad (\text{гиперболический тип}); \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + b_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial A}{\partial \eta} + cA + f = 0 \quad (\text{параболический тип}). \quad (1.37)$$

Для дальнейшего упрощения введем вместо $A(\xi, \eta)$ новую функцию $B(\xi, \eta)$:

$$A = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot B,$$

где λ и μ — неопределенные пока постоянные.

Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} + \lambda B \right);$$

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \left(\frac{\partial B}{\partial \eta} + \mu B \right);$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + 2\lambda \frac{\partial B}{\partial \xi} + \lambda^2 B \right);$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda \frac{\partial B}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial B}{\partial \xi} + \lambda\mu B \right);$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} + 2\mu \frac{\partial B}{\partial \eta} + \mu^2 B \right).$$

Подставляя выражения для производных в уравнение (1.35) и сокращая затем на $e^{\lambda\xi + \mu\eta}$, получим:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} + (b_1 + 2\lambda) \frac{\partial B}{\partial \xi} + (b_2 + 2\mu) \frac{\partial B}{\partial \eta} + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c)B + f_1 = 0.$$

Параметры λ и μ выбираем так, чтобы два коэффициента, например, при первых производных, обратились в нуль ($\lambda = -0,5b_1$; $\mu = -0,5b_2$). В результате получим:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} + \gamma B + f_1 = 0,$$

где γ — постоянная, выражающаяся через c, b_1 и b_2 , $f_1 = f \cdot e^{-(\lambda\xi + \mu\eta)}$.

Как было отмечено в разделе 1.7.2, уравнение с постоянными коэффициентами в случае нескольких независимых переменных

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial A}{\partial x_i} + cA + f = 0$$

при помощи линейного преобразования переменных приводится к каноническому виду одновременно для всех точек области его определения.

Вводя вместо $A(\xi, \eta)$ новую функцию $B(\xi, \eta)$

$$A(\xi, \eta) = B(\xi, \eta) \cdot e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}$$

и выбирая нужным способом λ_i , мы можем дальше упростить уравнение, что приводит нас к каноническим формам, сходным со случаем $n = 2$.

Контрольные вопросы к главе 1

- 1.1. Что такое поле? Какими функциями оно характеризуется?
- 1.2. Какие виды полей вам известны и где они используются?
- 1.3. Назовите основные свойства скалярных полей. Приведите примеры.
- 1.4. Назовите основные свойства векторных полей. Приведите примеры.
- 1.5. Назовите основные дифференциальные операторы, используемые при анализе поля.
- 1.6. Что такое ротор (или вихрь) поля и как он определяется?
- 1.7. Что такое расхождение поля и как оно определяется?
- 1.8. Расскажите о теореме Остроградского–Гаусса и области ее использования.
- 1.9. Расскажите о теореме Стокса и области ее использования.
- 1.10. Поясните, что представляет собой теорема Грина и где она используется?
- 1.11. Какие уравнения можно назвать гиперболическими?
- 1.12. Какие уравнения можно назвать параболическими?
- 1.13. Какие уравнения можно назвать эллиптическими?

Библиографический список к главе 1

- 1.1. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: ИИЛ. Т. 1, 1958. — 930 с.
- 1.2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 768 с.

- 1.3. *Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. — Минск: Университетское, 1988. — 246 с.
- 1.4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: ИИЛ. Т. 1, 1958. — 930 с.
- 1.5. *Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П.* Методы решения задач математической физики/под ред. Г. И. Марчука. — М.: ИВМ РАН, 2001. — 399 с.

Глава 2

Краевые задачи математической физики

2.1. Постановка краевых задач математической физики

2.1.1. Основные понятия

Математическая постановка целого ряда физических задач приводит к уравнениям, содержащим частные производные искомой функции. Их называют также уравнениями математической физики. Такие физические процессы, как распространение тепла, движение жидкости и газа, колебания упругого тела, электромагнитные процессы, приводят к уравнениям математической физики.

Рассмотрим основные понятия теории уравнений математической физики. Уравнением с частными производными относительно функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется уравнение, содержащее хотя бы одну из частных производных этой функции. Наивысший порядок входящих в уравнение производных называется *порядком* уравнения.

Например, уравнение с частными производными относительно $u(x, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f(x, t) \quad (2.1)$$

является уравнением четвертого порядка.

Функция, обращающая уравнение с частными производными в тождество, называется его *решением*.

Уравнения с частными производными, как и обыкновенные дифференциальные уравнения, имеют бесчисленное множество решений. Но если общее решение обыкновенного дифференциального уравнения зависит от произвольных постоянных, то множество решений уравнения с частными производными зависит от произвольных функций. Так, обыкновенное дифференциальное уравнение $y'' = 1$ относительно $y(x)$ имеет общее решение $y(x) = 0,5x^2 + c_1x + c_2$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а уравнение с частными производными — $(\partial^2 u / \partial x^2) = 1$ относительно функции $u(x, y)$ имеет общее решение $u(x, y) = 0,5x^2 + \varphi(y)x + \psi(y)$, где $\varphi(y), \psi(y)$ — произвольные функции.

Уравнение с частными производными называется линейным относительно старших производных, если старшие производные входят линейно с коэффициентами, зависящими лишь от аргументов функции, и квазилинейным, если коэффициенты зависят еще от искомой функции и ее младших производных.

Уравнение называется линейным, если искомая функция и ее производные входят в уравнение линейно.

Так, уравнение 1-го порядка относительно $u(x, y)$

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = f \quad (2.2)$$

будет линейным, если a, b, f — известные функции только аргументов x и y , и квазилинейным, если они являются функциями x, y, u . Уравнение 2-го порядка относительно $u(x, y)$

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad (2.3)$$

в котором a, b, c, f — известные функции $x, y, u, (\partial u / \partial x), (\partial u / \partial y)$, является квазилинейным, а в случае, когда a, b, c зависят лишь от аргументов x, y , — линейным относительно старших производных или полулинейным.

Линейное уравнение 2-го порядка относительно $u(x, y)$ имеет вид

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f, \quad (2.4)$$

где a_{ij}, b_i, c, f зависят лишь от x, y ($i, j = 1, 2$).

Линейное уравнение второго порядка относительно $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет вид

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \quad (2.5)$$

где a_{ik}, b_i, c, f — функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, \dots, n$.

Первая сумма в этом уравнении, содержащая все старшие производные, называется *главной частью уравнения*.

Уравнения (2.2), (2.4), (2.5) при $f = 0$ называются однородными, при $f \neq 0$ — *неоднородными*.

2.1.2. Характеристики квазилинейных уравнений 2-го порядка

Рассмотрим характеристики линейных и квазилинейных уравнений (2.2), (2.3), (2.5) и убедимся в том, что это — линии (а для уравнения (2.5) — поверхности), при переходе через которые старшие производные решения могут терпеть разрыв, тогда как сами решения и их младшие производные остаются непрерывными. Такие линии (поверхности) называются также линиями (поверхностями) слабых разрывов решения. Одновременно введем классификацию квазилинейных уравнений 2-го порядка, связанную с существованием у них

одного или двух семейств характеристик или с отсутствием их. Введенная таким образом классификация уравнений второго порядка отражает наличие тех или иных свойств решений и определяет возможность постановки для данного класса уравнений соответствующих задач математической физики.

Введем сначала характеристики для квазилинейного уравнения (2.2) 1-го порядка

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = f,$$

коэффициенты которого $a = a(x, y, u)$, $b = b(x, y, u)$ и правая часть $f = f(x, y, u)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми в области изменения своих аргументов.

Пусть в области G плоскости XOY определена непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$, являющаяся решением уравнения (2.2). Пусть также Γ — расположенная в области G гладкая кривая, уравнение которой $y = y(x)$, не имеющая вертикальной касательной (например, $y(x)$, является непрерывно дифференцируемой функцией), и пусть известны значения решения на Γ : $u|_{\Gamma} = u(x, y(x)) = \alpha(x)$.

Поставим задачу: найти на той же кривой Γ значения частных производных $\partial u / \partial x$ и $\partial u / \partial y$.

Заметим, что если будет решена эта задача, то станет возможным приближенно с точностью до малых 1-го порядка определить значения решения в окрестности Γ , поскольку значения решения в близких точках $M(x, y) \in \Gamma$ и $M'(x + \Delta x, y + \Delta y) \notin \Gamma$ (рис. 2.1) связаны соотношением

$$u_{M'} \approx u_M + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_M \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_M \Delta y.$$

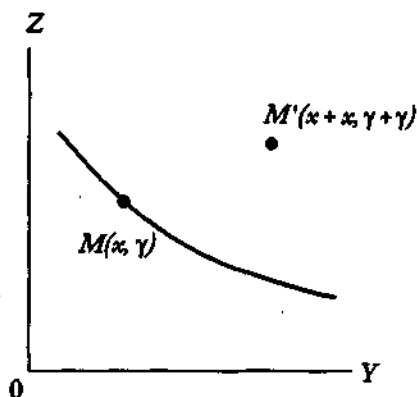


Рис. 2.1. Непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$, определенная в области G плоскости XOY

Для нахождения частных производных $\partial u / \partial x$ и $\partial u / \partial y$ в точках продифференцируем по x заданное на Γ равенство $u(x, y(x)) = \alpha(x)$. Получим дифференциальное соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \alpha'(x), \quad (2.6)$$

которое совместно с исходным уравнением (2.2) дает систему линейных алгебраических уравнений относительно искоемых производных $\partial u / \partial x$ и $\partial u / \partial y$. Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & \frac{dy}{dx} \end{vmatrix} = a \frac{dy}{dx} - b. \quad (2.7)$$

Рассмотрим два крайних случая:

- 1) $\Delta \neq 0$ во всех точках кривой Γ ;
- 2) $\Delta = 0$ во всех точках кривой Γ .

В первом случае система (2.2), (2.6) имеет единственное решение, и в каждой точке кривой Γ найдутся единственные значения производных $\partial u / \partial x$ и $\partial u / \partial y$. Во втором случае, учитывая, что по предположению решение $u(x, y)$ в области G существует и, следовательно, система (2.2), (2.6) совместна, имеем, что в каждой точке Γ

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0, \quad (2.8)$$

где Δ_1, Δ_2 — определители, получающиеся из определителя Δ системы (2.2), (2.6) заменой соответственно первого или второго столбца столбцом свободных членов; тогда система (2.2), (2.6) имеет бесчисленное множество решений. Таким образом, во втором случае в каждой точке кривой Γ по значениям решения $u(x, y)$ значения производных $\partial u / \partial x$ и $\partial u / \partial y$ находятся неоднозначно. В этом случае кривую Γ называют характеристикой уравнения (2.2), соответствующей решению, значения которого на Γ заданы. Уравнение

$$\Delta = a\lambda - b = 0, \quad (2.9)$$

где $\lambda = dy / dx$ называется уравнением характеристик. При конкретном решении $u(x, y)$ оно определяет в области G поле направлений, называемых характеристическими. Заменяя λ на dy / dx , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}, \quad (2.10)$$

общее решение которого $y = y(x, C)$, где C — произвольная постоянная, определяет однопараметрическое семейство характеристик. Если уравнение (2.2) линейное (коэффициенты его не зависят от решения $u(x, y)$), то характеристики могут быть найдены без предварительного определения решения. Если же уравнение (2.2) квазилинейное, то его характеристики зависят от решения и могут быть определены, если известно решение уравнения (2.2).

Пусть Γ — характеристика уравнения (2.2), соответствующая решению $u(x, y)$. Рассмотрим выполняющиеся на ней соотношения (2.8). Не все они независимы. Действительно, если $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, и, следовательно, столбцы каждого из определителей Δ , Δ_1 пропорциональны, то пропорциональны и столбцы определителя Δ_2 , а тогда $\Delta_2 = 0$. Наряду с уравнением характеристик $\Delta = 0$ рассмотрим соотношение $\Delta_1 = 0$. Раскрывая определитель Δ_1 , получаем равенство

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f & b \\ \frac{du}{dx} & \frac{dy}{dx} \end{vmatrix} = f \frac{dy}{dx} - b \frac{du}{dx} = 0,$$

или, учитывая равенство (2.10), — дифференциальное соотношение

$$\frac{du}{dx} = \frac{f}{a}. \quad (2.11)$$

Таким образом, на характеристике решение $u(x, y)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (2.11). В частности, если уравнение (2.2) однородное, т. е. $f = 0$, то $du/dx \equiv 0$ или $u \equiv C$ на характеристике, причем постоянная C , вообще говоря, различна на различных характеристиках.

Заметим, что, в силу неоднозначного определения в точках характеристики производных du/dx и du/dy , неоднозначно определяется и производная du/dn по любому некасательному к характеристике (или, как еще говорят, по выводящему) направлению $\vec{n} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, $\operatorname{tg} \alpha \neq \lambda(b/a)$, так как $du/dn = (du/dx) \cos \alpha + (du/dy) \sin \alpha$. Отсюда следует, что при переходе через характеристику производная du/dn по выводящему направлению $\vec{n}$ может иметь разрыв, тогда как само решение остается непрерывным. Таким образом, характеристики — линии слабых разрывов решений. У решений квазилинейных уравнений (зависимость коэффициентов уравнения от решения здесь существенна) могут быть линии, при переходе через которые по выводящему направлению терпит разрыв само решение или его младшие производные. Они называются линиями **сильных разрывов** или **ударными волнами**. Рассмотрим пример, показывающий механизм образования сильных разрывов решений квазилинейного уравнения (2.2).

Пусть в полуплоскости $y \geq 0$ определено квазилинейное уравнение

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.12)$$

и на прямой $y = 0$ заданы значения решения $u(x, y)$:

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (2.13)$$

В этом случае $a = u$, $b = 1$, $f = 0$, дифференциальное уравнение характеристик (2.11) принимает вид

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{u},$$

а дифференциальное соотношение (2.11) на характеристиках $du/dx = 0$. Отсюда следует, что на характеристике $u(x, y) = k - \text{const}$ и $dy/dx = (1/k)$, т. е. характеристики — прямые линии. Используя условие (2.13), найдем наклон характеристик:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=0} = \frac{1}{u(x, 0)} = \frac{1}{\varphi(x_0)},$$

где x_0 — фиксированная точка оси Ox .

Пусть $\varphi(x)$ имеет график, показанный на рис. 2.2; x^* — точка ее локального максимума и в точке x^* и ее окрестности $\varphi(x) > 0$. Тогда угловые коэффициенты характеристик при подходе к точке x^* слева убывают, а после прохождения точки x^* начинают возрастать по абсолютной величине. Справа от x^* угловой коэффициент k отрицателен, так как угол между Ox и касательной тупой. Поэтому найдутся на оси Ox в окрестности x^* точки P и Q с абсциссами x_1 и x_2 такие, что $x_1 < x^* < x_2$, $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, и проходящие через P и Q характеристики пересекутся в некоторой точке M в полуплоскости $y > 0$. Так как решение $u(x, y)$ постоянно на характеристике, то оно в точке M , как принадлежащей характеристике PM , должно принимать значение $\varphi(x_1)$, а в точке M , как принадлежащей характеристике QM , — значение $\varphi(x_2)$. Таким образом, в точке M пересечения характеристик решение $u(x, y)$ терпит разрыв.

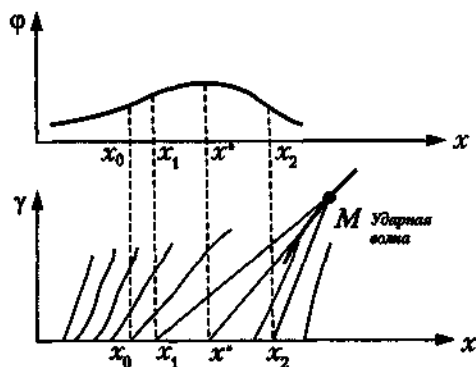


Рис. 2.2. График функции $\varphi(x)$

Введем теперь характеристики квазилинейного уравнения 2-го порядка. Рассмотрим сначала уравнение (2.3) относительно $u(x, y)$:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,$$

где a, b, c, f — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов $x, y, u, (\partial u / \partial x), (\partial u / \partial y)$. Как и при введении характеристик уравнения (2.2) 1-го порядка, предположим, что в области G плоскости $ХОУ$ определена дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$, являющаяся решением уравнения (2.3). Пусть Γ , расположенная в области G , — гладкая кривая,

не имеющая вертикальной касательной, и $y = y(x)$ — ее уравнение, $y(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть на Γ известны значения решения и его частных производных 1-го порядка:

$$u|_{\Gamma} = \alpha(x), p|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma} = \beta(x), q|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{\Gamma} = \gamma(x). \quad (2.14)$$

Поставим задачу: найти на той же кривой Γ значения частных производных решения $u(x, y)$ 2-го порядка:

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Это позволит, например, определить приближенно, с точностью до малых 3-го порядка, значения решения и в точках M' , близких к Γ (см. рис. 2.1):

$$u_{M'} = u_M + p_M \Delta x + q_M \Delta y + r_M \Delta x^2 - 2s_M \Delta x \Delta y + t_M \Delta y^2, \quad (2.15)$$

и, следовательно, позволит построить приближенно решение $u(x, y)$ в некоторой окрестности кривой Γ .

Значения частных производных 2-ого порядка r, s, t связаны уравнением (2.3) и дифференциальными соотношениями $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$.

Согласно условию (2.14) значения dp и dq на Γ известны: $dp|_{\Gamma} = \beta'(x) dx$, $dq|_{\Gamma} = \gamma'(x) dx$. Следовательно, для определения на Γ трех величин r, s, t имеем систему трех линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} ar + 2bs + ct &= f, \\ rdx + sdy &= dp, \\ sdx + tdy &= dq. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Определитель этой системы имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2. \quad (2.17)$$

Рассмотрим два крайних случая: 1) $\Delta \neq 0$ во всех точках кривой Γ ; 2) $\Delta = 0$ во всех точках кривой Γ .

В первом случае система (2.17) имеет единственное решение и, следовательно, в каждой точке кривой Γ однозначно определены значения искомых вторых производных $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 u / \partial x \partial y$, $\partial^2 u / \partial y^2$.

Во втором случае в силу предположения, что решение $u(x, y)$ в области G существует, система (2.16) совместна и, следовательно, в каждой точке кривой Γ должны одновременно с определителем Δ быть равны нулю определители Δ_i , $i=1, 2, 3$, получающиеся из определителя Δ заменой i -го столбца столбцом свободных членов системы (2.16):

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0. \quad (2.18)$$

В этом случае система (2.16) имеет бесчисленное множество решений. А значит, в каждой точке кривой Γ значения вторых производных $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 u / \partial x \partial y$, $\partial^2 u / \partial y^2$ решения по значениям на Γ самого решения u и его первых производных $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$ определяются неоднозначно. Такую кривую Γ называют *характеристикой уравнения* (2.3), соответствующей решению $u(x, y)$, а уравнение

$$\Delta \equiv a dy^2 - 2b dy dx + c dx^2 = 0 \quad (2.19)$$

называют *уравнением характеристик*. Решая уравнение (2.19) относительно $dy / dx = \lambda$, получаем

$$\lambda_{1,2} \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(b \pm \sqrt{b^2 - ac} \right) / a.$$

Пусть в области G известно конкретное решение u (и, следовательно, его производные $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$). Тогда значения λ_1 , λ_2 являются функциями $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ только аргументов x и y .

Если в некоторой точке $M(x, y)$ области G дискриминант $\delta = b^2 - ac > 0$, то уравнение (2.3) в данной точке — гиперболического типа. Если $\delta = b^2 - ac = 0$, то уравнение (2.3) в данной точке M — параболического типа. Если $\delta = b^2 - ac < 0$, то уравнение (2.3) в данной точке M — эллиптического типа. Уравнение (2.3), гиперболическое (параболическое, эллиптическое) в каждой точке некоторой области, называется гиперболическим (параболическим, эллиптическим) в этой области.

Пусть уравнение (2.3) при выбранном $u(x, y)$ относится в области G к гиперболическому типу. Тогда значения λ_1 , λ_2 вещественны и различны, и мы имеем два дифференциальных уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = f_2(x, y),$$

каждое из которых определяет в области G однопараметрическое семейство характеристик. В этом случае через каждую точку M области G проходят две характеристики, принадлежащие различным семействам и пересекающиеся под ненулевым углом.

В случае если в области G уравнение (2.3) параболическое, то значения λ_1 , λ_2 вещественны и совпадают, дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = f(x, y)$$

определяет в области G одно однопараметрическое семейство характеристик.

Если же уравнение (2.3) при выбранном $u(x, y)$ относится к эллиптическому типу в области G , то значения λ_1 , λ_2 комплексные и уравнение (2.3) характеристик не имеет.

Приведенная выше классификация квазилинейных уравнений (2.3) по знаку дискриминанта $\delta = b^2 - ac$, по существу, классифицирует их по числу принадлежащих

им семейств характеристик, наделяющих решения соответствующих уравнений рядом общих свойств.

Вернемся к равенствам (2.18). Можно показать, что независимыми из них являются только два, например $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$. Первое из них ($\Delta = 0$) есть уравнение характеристик. Второе ($\Delta_1 = 0$) дает дифференциальное соотношение, выполняющееся на характеристиках. Раскрывая определитель Δ_1 , имеем соотношение

$$f dy^2 + c dx dp - c dy dq - 2b dy dp = 0.$$

В случае уравнения (2.3) гиперболического типа в области G отсюда получаются два соотношения: на первом семействе характеристик, где $dy = \lambda_1 dx$, и на втором, где $dy = \lambda_2 dx$.

Отметим, что (в силу неоднозначности определения на характеристиках значений вторых производных решения через значения самого решения и его производных 1-го порядка) при переходе через характеристику по выводящему направлению вторые производные могут терпеть разрыв, тогда как само решение и его производные 1-го порядка остаются непрерывными, т. е. снова характеристики — линии слабых разрывов решений.

2.1.3. Классификация квазилинейных уравнений 2-го порядка

Для того чтобы сформулировать и решить техническую (физическую) задачу, необходимо представить ее в виде математической модели.

Математическая модель включает: написание уравнения для определения соответствующих характеристик поля, граничные условия (при решении в ограниченных областях), начальные условия и условия в бесконечности. Рассмотрим подробнее каждый из названных элементов.

Как уже отмечалось, автор ограничился формулированием физических задач в виде дифференциальных уравнений математической физики в частных производных. Напомним, что большинство физических задач представимо в виде дифференциальных уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов.

Уравнения гиперболического типа. Уравнения с частными производными 2-го порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Простейшее уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (2.20)$$

обычно называют уравнением *колебаний струны*.

Уравнения параболического типа. Уравнения с частными производными 2-го порядка параболического типа наиболее часто встречаются при изучении

процессов теплопроводности и диффузии. Простейшее уравнение параболического типа

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad (y = a^2 t) \quad (2.21)$$

обычно называют уравнением *теплопроводности*.

Уравнения эллиптического типа. При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является однородное уравнение Лапласа

$$\Delta A = 0. \quad (2.22)$$

Функция A называется *гармонической* в области T , если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

При изучении свойств гармонических функций разработаны различные математические методы, оказавшиеся плодотворными и в применении к уравнениям гиперболического и параболического типов.

Ранее упомянутые гиперболические, параболические и эллиптические уравнения, например, в трехмерном измерении для расчета скалярных полей, а также отдельных компонент векторных полей, имеют общий вид:

$$\begin{aligned} a(x, y, z) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2b(x, y, z) \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + 2c(x, y, z) \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z} + 2d(x, y, z) \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z} + \\ + e(x, y, z) \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + g(x, y, z) \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = f \left(x, y, z, A, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

причем если уравнение линейно по A , то f имеет вид:

$$f = h(x, y, z) \frac{\partial A}{\partial x} + k(x, y, z) \frac{\partial A}{\partial y} + l(x, y, z) \frac{\partial A}{\partial z} + m(x, y, z) A + n(x, y, z).$$

Уравнение (2.23) является наиболее общим линейным уравнением с частными производными по трем переменным, включающим, как частные случаи, и уравнения (2.20)–(2.22). Эти координаты могут быть либо все пространственными, либо одна из них может быть и временной.

В зависимости от вида области распространения поля, а область при формулировании математической задачи, как правило, приближенно заменяется фигурой, ограниченной аналитической поверхностью (например, поверхностью 2-го порядка), выбирается та или иная система координат, более подходящая для описания данной области. Как отмечалось ранее, будем использовать ортогональные криволинейные системы разделяющих координат, как наиболее удобные для получения строгого решения. Слово разделяющие здесь означает, что уравнения, описывающие поле, могут быть при определенных условиях разделены на частные уравнения по каждой из координат.

Следует напомнить, что существует большая группа ортогональных криволинейных разделяющих систем координат, хорошо представленная в опубликованной литературе (см., например, [2,3, с. 612]): прямоугольные; цилиндрические (круговые, эллиптические, параболические); сферические; сфероидальные (вытянутые и сплюснутые); бисферические; эллипсоидальные, параболоидальные, тороидальные и др. В физических задачах при решении объемных задач часто ограничиваются прямоугольными координатами x, y, z ; круговыми цилиндрическими — r, φ, z и сферическими — r, ϑ, φ . При решении задач в плоских областях используют, соответственно, декартовы координаты x, y ; полярные — r, φ .

2.1.4. Граничные (краевые) и начальные условия

Основные понятия. Типичны для системы уравнений векторного поля задачи, в которых компоненты поля ищутся в бесконечной области, в то время как причиной возникновения и поддержания состояния поля являются процессы, происходящие в конечной части пространства. При исследовании дифференциальных уравнений математической физики, с помощью которых описывается поле, в решения входят постоянные интегрирования. Их определяют с помощью граничных (краевых) условий. Таким образом, заданием только дифференциального уравнения, которому должно удовлетворять решение, задача определяется не однозначно, так как каждое уравнение, описывающее поле, имеет бесконечное число решений. Чтобы сделать задачу определенной, имеющей однозначный ответ, надо из всего множества возможных решений выбрать обладающее некоторыми свойствами на определенных граничных поверхностях. Любая физическая задача должна давать не только дифференциальное уравнение, которое надо решить, но также и граничные условия, которым должно удовлетворять решение. Поэтому под граничными следует понимать условия, которым подчиняется поле на границах раздела сред с различными свойствами.

Удовлетворить граничным условиям часто так же трудно, как и решить дифференциальное уравнение.

Первый факт, который надо заметить, состоит в том, что мы не можем пытаться подчинить решения данного уравнения граничным условиям произвольного вида. Для каждого типа уравнений имеется определенная совокупность граничных условий, определяющих ответ однозначно, в то время как при условиях другого вида ответ неоднозначен или невозможен. При этом, конечно, в реальной физической задаче граничные условия всегда должны быть правильного вида и определять ответ однозначно, и при постановке задачи в соответствии с реальной действительностью мы будем иметь всегда правильные граничные условия для уравнений. Однако не всегда легко сказать, какие именно граничные условия соответствуют «реальной действительности»; поэтому желательно знать, какие условия подходят для того или иного уравнения; это может дать указание, каким образом формулировать наши математические задачи, чтобы они возможно точнее соответствовали физическим.

Существует много разновидностей граничных условий, приемлемых при решении соответствующих полевых задач, о которых будет подробно говорить-ся в соответствующих главах настоящего пособия при решении конкретных задач. Наиболее часто, если граничными условиями являются координатные поверхности, имеют дело с условиями Дирихле, Неймана, Коши или смешанными (Дирихле и Неймана).

При наличии в пространстве неоднородных поверхностей конечной толщины, разделяющих среды с различными свойствами, компоненты поля могут претерпевать резкий скачок при переходе через поверхность. В связи с этим при решении задач необходимо учитывать граничные эффекты, возникающие на поверхностях раздела сред. Математическое моделирование таких явлений сводится к замене неоднородных поверхностей идеальными поверхностями. При этом на идеальных поверхностях вводятся граничные условия, которым удовлетворяют предельные значения поля на реальных поверхностях.

Будем считать, что скачкообразный переход свойств одной среды в свойства другой является предельным случаем непрерывного перехода, при котором свойства одной среды переходят в свойства другой непрерывным образом в некоторой малой области, примыкающей к поверхности раздела. При этих предположениях для установления граничных условий необходимо учитывать уравнения поля, которые выполнены также и в переходной области между двумя средами.

Поверхности раздела материальных сред, вообще говоря, не являются идеальной границей, а поле в окрестности границы не является непрерывным и часто характеризуется большими градиентами поля. Несмотря на это, интегральные характеристики поля сохраняют свои значения по обе стороны от пограничного тонкого слоя, что позволяет при математическом моделировании заменять приграничную область идеальной поверхностью разрыва сред. При этом поле в переходной области исключается из рассмотрения, а из законов формирования поля в окрестности границы устанавливаются граничные условия для предельных значений векторов поля на идеальной поверхности разрыва сред. По существу, многообразие задач по расчету поля в многосвязных областях определяется многообразием условий на границах раздела материальных сред. В частности, для электромагнитного поля (ЭМП) разработаны классы приближенных граничных условий на граничных поверхностях (см., например, [2.5]).

Виды граничных (краевых) условий. Как указывалось ранее, уравнение с частными производными имеет, вообще говоря, бесчисленное множество решений, зависящих от произвольных функций.

При рассмотрении конкретного физического процесса необходимо из бесчисленного множества решений уравнения, описывающего его общую физическую модель, выделить единственное. Для этого надо подчинить решение дополнительным условиям, или, как говорят, поставить задачу математической физики. Дополнительные условия в зависимости от их физического смысла разделяют на начальные и граничные (краевые).

Начальные условия в случае нестационарных процессов задают значения искомой функции или ее производных во всей рассматриваемой области в начальный момент времени. Так, в задаче о распространении тепла может быть задано распределение температур $u(M, t)$ в области $D \subset R^n$ ($\subset$ — знак принадлежности пространству R^n) в начальный момент времени $t = t_0$

$$u(M, t_0) = \varphi(M) \forall M \in D,$$

где R^n — n -мерное пространство; $\forall$ — квантор общности, знак включения точки M , находящейся внутри области D (знак $\in$).

В задаче о малых поперечных колебаниях мембраны могут быть известны отклонения $u(M, t)$ точек M мембраны от положения равновесия в начальный момент времени и их начальная скорость

$$u(M, t_0) = \varphi(M), \quad u(M, t_0) = \psi(M) \forall M \in E \subset R^2. \quad (2.24)$$

В задачах о процессах в ограниченных областях могут быть известны значения искомой функции, ее производных или соотношения между ними на границе области в любой момент времени. Такие условия называются граничными, или краевыми. Краевое условие линейное, если искомая функция и ее производные входят в него линейно.

Пусть Γ — граница области $D \subset R^n$, $S = \{(M, t) | M \in \Gamma, t \geq 0\}$. На практике часто приходят к следующим трем видам линейных краевых условий на S :

○ 1-го рода (условия Дирихле):

$$u|_S = \mu; \quad (2.25)$$

○ 2-го рода (условия Неймана):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \mu, \quad (2.26)$$

является производной по направлению;

○ 3-го рода (смешанные):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_S = \mu, \quad \sigma > 0, \quad (2.27)$$

где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности S , σ — коэффициент стенки.

В задаче о распространении тепла в ограниченном теле D к краевому условию 1-го рода приходят, когда в каждой точке границы тела Γ в любой момент времени известна температура; к краевому условию 2-го рода — когда известно значение теплового потока; к краевому условию 3-го рода — когда на границе тела происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона: тепловой поток через площадку единичной площади пропорционален разности температур тела и внешней среды:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = -\sigma(u - u_{\text{среды}}) \Big|_S.$$

Здесь $\sigma > 0$ — коэффициент теплопередачи или теплоотдачи, известной величиной является $\sigma u_{\text{среды}}|_s = \mu$.

В задаче о малых поперечных колебаниях мембраны условие закрепления края, когда отклонения точек края от положения равновесия в любой момент времени равны нулю $u|_s = 0$, является частным случаем краевого условия 1-го рода.

Условие упругого закрепления края мембраны, когда при смещении края вдоль оси Ox возникают силы упругости, по величине пропорциональные отклонениям $u(M, t)$ точек границы от начального положения $u_0(M, 0)$:

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_s = -\sigma(u - u_0) \Big|_s,$$

где $\sigma > 0$ — константа, зависящая от свойств материала, приводит к краевому условию 3-го рода.

Случай колебаний мембраны со свободным краем приводит к краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_s = 0,$$

что является частным случаем краевого условия 2-го рода.

При рассмотрении конкретных процессов может возникать задача со смешанными краевыми условиями, когда на части границы задается одно краевое условие, а на остальной части — другое краевое условие.

Рассмотрим постановку задач для уравнения теплопроводности, волнового уравнения, уравнений Лапласа и Пуассона.

Начальные условия и условия в бесконечности. Математические уравнения позволяют однозначно определять поле в ограниченном пространстве при задании некоторых дополнительных условий в начале системы координат и в бесконечности.

Начальные условия свидетельствуют о характеристиках поля в источнике. Они связывают функции поля и их производные при $r \rightarrow 0$:

$$A_r \Big|_{r \rightarrow 0} \rightarrow A_r^{(0)}, \quad \frac{\partial A_r}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow 0} \rightarrow A_r^{(1)}. \quad (2.28)$$

Условия в бесконечности трактуются следующим образом. Если среда обладает хотя бы минимальной проводимостью, условия состоят в требовании обращения поля в нуль в бесконечности от любой системы источников, лежащих внутри конечной области:

$$A_r \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial A_r}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Задачи для нестационарных процессов в ограниченных областях, в которых дополнительно к уравнению задаются начальные условия и краевые условия, называются начально-краевыми задачами для данного уравнения. В случае нестационарных процессов во всем пространстве R^n задают начальные условия,

и задачу тогда называют начальной задачей. Для стационарных процессов имеет смысл ставить лишь краевые задачи.

При решении задач математической физики в ряде случаев приходится, кроме начальных и краевых условий, накладывать другие дополнительные ограничения, например условия на поведение решения в окрестности особой точки или в бесконечности.

2.1.5. Единственность решения краевых задач

Дифференциальные уравнения, описывающие то или иное физическое поле, совместно с граничными и начальными условиями определяют краевую задачу — математическую модель исследуемого физического процесса. Представляется необходимым при нахождении решения этой математической задачи установить, является ли найденное решение единственным. Для каждой физической задачи требуется доказать теорему существования и единственности решения. Как правило, для большинства из задач, встречающихся в инженерной практике и описываемых рассмотренными дифференциальными уравнениями, доказательства таких теорем уже содержатся в математической литературе. Если ставится новая краевая задача, ранее не рассмотренная, требуется доказывать теорему существования и единственности ее решения. В последующих главах можно познакомиться с доказательствами таких теорем для отдельных типов краевых задач.

2.2. Виды граничных условий

2.2.1. Задачи с начальными условиями

Задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad (2.30)$$

где $Lu = a^2 \Delta u$ или $Lu = \frac{1}{\rho p} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - \frac{1}{n}$, состоит в нахождении решения

уравнения (2.30), непрерывного в R^n и удовлетворяющего начальному условию Коши

$$u(M, 0) = \varphi(M) \quad \forall M \in R^n. \quad (2.31)$$

(Здесь и всюду далее рассматриваются классические решения уравнений, т. е. имеющие непрерывные производные всех тех порядков, которые входят в уравнение, и обращающие уравнение в тождество.)

Задача Коши для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \quad (2.32)$$

где $Lu = a^2 \Delta u$ или $Lu = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(T \operatorname{grad} u)$, состоит в нахождении решения уравнения (2.32), непрерывно дифференцируемого в R^n и удовлетворяющего начальным условиям Коши

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad \frac{\partial u(M, 0)}{\partial t} = \psi(M) \quad \forall M \in R^n. \quad (2.33)$$

2.2.2. Начально-краевые задачи

Первая (соответственно вторая или третья) начально-краевая задача для уравнения теплопроводности (2.30) в области Ω состоит в нахождении решения этого уравнения, непрерывного (соответственно непрерывно дифференцируемого) в замкнутой области $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющего начальному условию

$$u(M, 0) = \varphi(M) \quad \forall M \in D \quad (2.34)$$

и краевому условию 1-го рода (2.25) (соответственно 2-го рода (2.26) или 3-го рода (2.27)).

Первая (вторая или третья) начально-краевая задача для волнового уравнения (2.32) в области Ω состоит в нахождении решения этого уравнения, непрерывно дифференцируемого в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющего начальным условиям

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad \frac{\partial u(M, 0)}{\partial t} = \psi(M) \quad \forall M \in D \quad (2.35)$$

и краевым условиям 1-го рода (2.25) (соответственно 2-го рода (2.26) или 3-го рода (2.27)).

2.2.3. Краевые задачи

Внутренняя задача Дирихле (или первая краевая задача) для однородного или неоднородного уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad (\Delta u = f) \quad (2.36)$$

в области D состоит в нахождении решения этого уравнения, непрерывного в $\bar{D}$ и удовлетворяющего на границе области краевому условию 1-го рода

$$u|_r = \mu. \quad (2.37)$$

Внутренняя задача Неймана (соответственно третья краевая задача) состоит в нахождении решений уравнений (2.36), непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющих на границе области краевому условию 2-го рода (соответственно 3-го рода)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_r = \mu \quad \left(\text{соответственно} \quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \right|_r = \mu, \sigma > 0. \right) \quad (2.38)$$

Пусть $G \in R^n$ — область, содержащая внешность шара достаточно большого радиуса.

Внешняя задача Дирихле (соответственно Неймана или третья краевая задача) состоит в нахождении решения уравнения (2.36) в области G , непрерывного в замкнутой области $\bar{G}$ (соответственно непрерывно дифференцируемого $\bar{G}$) и удовлетворяющего на границе Γ области G краевому условию 1-го рода (2.37) (соответственно 2-го или 3-го рода (2.38)).

В тепловых терминах внутренняя задача Дирихле состоит в отыскании стационарного поля температуры u в области D по заданному распределению температуры u на границе Γ этой области.

2.3. О корректности постановки задач математической физики

Говорят, что задача математической физики поставлена корректно, если начальные и краевые условия обеспечивают:

- 1) существование решения в рассматриваемой области;
- 2) единственность решения (два решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным и краевым условиям, совпадают в области);
- 3) непрерывную зависимость решения от начальных и краевых условий (малые изменения начальных и граничных функций вызывают малые изменения решения в области).

Почему важно выяснить, прежде чем решать задачу математической физики, корректно ли она поставлена? Исследуя вопрос о существовании решения, выясняют, не переопределена ли задача, не являются ли наложенные на решение условия противоречивыми. Исследуя вопрос о единственности решения рассматриваемой задачи, выясняют, не является ли задача неопределенной, когда наложенные условия оказываются недостаточными для обеспечения единственности решения. Наконец, установление непрерывной зависимости решения от начальных и краевых условий важно по следующей причине. Если коэффициенты уравнения, которое, как правило, выводится на основе физических законов, являются точными константами или функциями, то функции, входящие в начальные или краевые условия, находятся приближенно из эксперимента. Поэтому задача, в которой малая ошибка в экспериментальных данных вызывает большие изменения решения, практически бесполезна.

Решение, непрерывно зависящее от начальных и краевых условий, называется также *устойчивым*, а задача — *устойчивой*.

Не всякая задача корректно поставлена. Примером некорректно поставленной задачи является задача Коши для уравнения Лапласа относительно $u(x, y)$ в полуплоскости $y > 0$.

Убедимся, что эта задача неустойчива. Действительно, рассмотрим решения двух задач:

$$1) \Delta u = 0, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0;$$

$$2) \Delta u_\lambda = 0, \quad u_\lambda(x, 0) = \frac{1}{\lambda} \cos \lambda x, \quad \frac{\partial u_\lambda(x, 0)}{\partial y} = 0.$$

При достаточно больших по модулю λ начальные функции у них мало отличаются:

$$|u(x, 0) - u_\lambda(x, 0)| = \left| \frac{1}{\lambda} \cos \lambda x \right| \leq \frac{1}{|\lambda|}.$$

С другой стороны, их решения $u = 0$ и $u_\lambda = \frac{1}{\lambda} \exp(\lambda y) \cos \lambda x$ при $x = 0, y = y_0 > 0$ отличаются на величину

$$|u(x, y_0) - u_\lambda(x, y_0)| = \left| \frac{1}{\lambda} \right| \exp(\lambda y_0),$$

превосходящую любое наперед заданное число $M > 0$ при соответствующим образом выбранном λ , так как

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [(1/\lambda) \exp(\lambda y_0)] \rightarrow \infty.$$

Приведенный пример некорректно поставленной задачи называется примером Адамара [2.14].

Некорректна также задача Коши для гиперболического уравнения с начальными данными на характеристике, так как в этом случае нарушается единственность решения.

2.4. Методы решения дифференциальных уравнений

2.4.1. Общие сведения

Основными уравнениями математической физики, используемыми в прикладных инженерных задачах, можно считать:

Из гиперболических:

- 1) уравнения свободных и вынужденных колебаний;
- 2) волновое уравнение.

Из параболических:

- 1) уравнение диффузии;
- 2) уравнение распространения тепла.

Из эллиптических:

- 1) однородное и неоднородное уравнения Лапласа. Последнее часто называют уравнением Пуассона;
- 2) однородное и неоднородное уравнения Гельмгольца.

Существует большое число методов, с помощью которых могут быть разрешены краевые задачи, описываемые с помощью дифференциальных уравнений

в частных производных математической физики. Из наиболее используемых, с целью получения эффективных решений, можно рекомендовать методы: теории потенциала; разложения по собственным функциям; разделения переменных; интегральных преобразований; дискретизации задач; расщепления; конформных отображений и др.

Рассмотрим кратко упомянутые здесь методы.

Методы теории потенциала. Теория потенциала, как правило, используется при решении эллиптических уравнений. Чаще всего этот метод используется при решении уравнений Лапласа. Если искать решение краевой задачи в виде потенциала, то для его плотности возникает интегральное уравнение Фредгольма, а интегрирование ведется по границе рассматриваемой области.

Методы разложения по собственным функциям. Метод отыскания решений в виде рядов по некоторым функциям — один из наиболее часто применяемых методов математической физики. Многие задачи приводят к так называемым задачам на собственные значения, которые представляют собой однородные уравнения с параметром. Значения параметров, при которых уравнение имеет ненулевые решения, называются *собственными значениями*, а соответствующие решения *собственными функциями*.

Методы разложения по собственным функциям применяются при решении гиперболических, параболических и эллиптических уравнений.

Методы разделения переменных. Широко используются при решении задач математической физики. Так же как и методы разложения по собственным функциям, предназначены для отыскания частных решений дифференциальных уравнений. Методы разделения переменных часто приводят к специальным функциям (Лежандра, Бесселя, Ганкеля, Матье и др.), которые являются решениями задач на собственные значения.

Методы интегральных преобразований — эффективные методы решения и исследования дифференциальных и интегральных уравнений математической физики, заключающиеся в интегрировании уравнения с некоторой весовой функцией, зависящей от двух аргументов, что часто приводит к упрощению исходной задачи. Основным условием для применения интегральных преобразований является наличие теоремы обращения, позволяющей найти исходную функцию, зная ее образ. В зависимости от весовой функции и области интегрирования рассматриваются преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, Ганкеля, Мейера, Гильберта и др. С помощью этих преобразований могут быть решены многие задачи теории колебаний, теплопроводности, диффузии, гидродинамики, теории упругости и др.

Методы дискретизации задач. Различные разделы вычислительной математики посвящены конструированию и исследованию методов решения задач математической физики. Одной из черт этих методов является то, что исходная задача приближенно заменяется решением новой задачи, в которой неизвестными являются конечное число параметров, знание которых позволяет приближенно вычислить искомое решение. Такой процесс замены решения исходной задачи новой задачей с конечным числом неизвестных параметров называют *дискретизацией* поставленной задачи математической физики. Дискретизацию

задачи можно осуществить многими методами, которые часто называют также соответствующими методами приближенного решения исходной задачи.

Одним из требований, которые предъявляются к методам дискретизации (приближенным методам вычислительной математики) с точки зрения вычислений, является требование аппроксимации. Исследование проблемы аппроксимации в методах дискретизации тесно связано с особым разделом математики, носящим название теории приближения функций.

Другим среди основных требований к методу дискретизации является требование возможности найти искомые величины с выбранной степенью точности. Особое значение для вычислений имеют поэтому такие приближенные методы и процессы, которые позволяют находить результаты со сколь угодно большой степенью точности. Такие методы называют сходящимися.

Вычисления предъявляют к теории приближенных методов еще одно требование — требование устойчивости вычислительного процесса.

Методы вычислительной математики — конечно-разностные, вариационные, проекционные, методы квадратур, проекционно-сеточные методы, методы интегральных тождеств и др. — нашли широкое применение при решении самых разнообразных задач математической физики и прикладных проблем.

Методы расщепления. Методы расщепления (методы дробных шагов) основаны на идее приближенного сведения исходных эволюционных задач со сложными операторами к решению последовательности задач с операторами более простой структуры, которые могут быть эффективно решены, например, методами конечных разностей, конечных элементов, проекционными методами.

Основа ряда методов расщепления создана при разработке одномерных задач методами конечных разностей с применением методов факторизации (прогонки). К последовательности подобных задач и сводятся сложные задачи математической физики с помощью методов расщепления. Класс методов расщепления (методов дробных шагов) широк: методы покомпонентного расщепления, двучиклические методы многокомпонентного расщепления, метод предиктор-корректор, методы переменных направлений и др.

Методы расщепления широко используются для приближенного решения многих прикладных задач гидродинамики, охраны окружающей среды, метеорологической теории климата, играющих важную роль в устойчивом развитии общества. Часто это единственные методы, с помощью которых удается решить данные задачи.

Методы конформного отображения. Конформное отображение относится к одному из основных понятий теории функций комплексного переменного и играет важную роль при решении задач аэро- и гидромеханики, теории упругости, электро- и радиотехники, теории фильтрации и др. К сожалению, использование этого метода ограничивается двумерными задачами (см., например, [2.13, 2.14]).

Подробнее о методах решения прикладных задач математической физики можно узнать из опубликованной математической литературы (см., например, [2.1]).

Выбор метода решения уравнений математической физики во многом определяется формой области задания физической задачи. Если область близка к аналитической, то наиболее простые результаты получаются при использовании методов разложения по собственным функциям, методов разделения переменных (метод Фурье); методов теории потенциала. Если область задания физической задачи далека от аналитической, то решение с большей эффективностью может быть получено с помощью методов интегральных преобразований, дискретизации задач, расщепления, конформных отображений.

В предлагаемом учебном пособии при решении конкретных прикладных задач математической физики использованы, в основном, методы разложения по собственным функциям и разделения переменных. Более подробно об используемых методах решения задач математической физики будет изложено в соответствующих разделах пособия.

2.4.2. Метод разделения переменных

Классический метод разделения переменных — один из важнейших методов решения краевых задач для линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Это связано с тем, что метод разделения переменных в криволинейных координатах позволяет свести процесс построения аналитических решений уравнений с частными производными к исследованию более простого объекта — обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае основных уравнений математической физики 2-го порядка соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения по каждой криволинейной координате являются уравнениями 2-го порядка, содержащими спектральные параметры (постоянные разделения). При наложении граничных условий возникают задачи на собственные функции, что позволяет применить общий принцип суперпозиции для линейных краевых задач. При этом, как правило, появляются специальные функции. К настоящему времени в литературе по специальным функциям накоплено более двухсот общепризнанных специальных функций, большая часть которых возникает в результате применения метода разделения переменных для решения эталонных краевых задач. Нельзя сделать вывод, что метод разделения переменных исчерпал свои прикладные и теоретические возможности. В ряде работ определены новые аспекты применения метода разделения переменных для решения актуальных задач математической физики и теоретических исследований. В частности, в связи с методом разделения переменных возникает одна из основных проблем уравнений с частными производными — описание всех криволинейных систем координат, в которых исходное уравнение или система уравнений допускают полное или частичное разделение переменных. Наиболее полно эта проблема решена для уравнений типов Лапласа и Гельмгольца в трехмерном пространстве. Известно, что уравнение типа Лапласа допускает полное разделение переменных в одиннадцати криволинейных ортогональных системах координат и разделение переменных в восьми системах координат, а уравнение типа Гельмгольца допускает только полное разделение переменных в одиннадцати системах координат. Основные методы,

применяемые для построения криволинейных систем координат с разделяющимися переменными, базируются на теоретико-групповом анализе уравнений с частными производными.

Метод применяется обычно в случаях, когда поверхности, на которых заданы граничные условия, являются координатными поверхностями в ортогональных криволинейных системах координат q_1, q_2, q_3 .

Сущность метода состоит в том, что подлежащее интегрированию дифференциальное уравнение записывают в соответствующих координатах q_1, q_2, q_3 и пытаются находить частные решения этого уравнения в форме произведения функций, зависящих каждая только от одной из переменных. Так как исходное дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции и ее производных, то сумма произвольного числа найденных таким способом частных решений его есть опять решение. Получаем, таким образом, возможность составить некое весьма общее решение предложенного уравнения.

Если соответствующим выбором значений, входящих в суммируемые решения параметров и постоянных, можно добиться того, чтобы все решение в целом удовлетворяло всем граничным и начальным условиям и представлялось бы при этом сходящимся рядом, и если сверх того установлено, что при этих условиях предложенное уравнение имеет одно-единственное решение, то найденное решение и будет правильным решением задачи.

В главах 3–5 поясняются особенности использования метода разделенных переменных для конкретных уравнений.

2.5. Теоремы сложения

Теоремы сложения представляют собой формулы

$$u_s(\vec{r}_1) = \sum_k C_{sk} u_k(\vec{r}_2), \quad (2.39)$$

выражающие в виде рядов (интегралов) решения u_s с разделенными переменными исходного уравнения в одной криволинейной системе координат через решения u_k с разделенными переменными в другой криволинейной системе координат.

Возникновение понятия теорем сложения в такой обобщенной формулировке связано с двумя моментами. Для элементарных функций хорошо известны простые формулы для вычисления значения функции от суммы, произведения и других сочетаний двух аргументов. В частности,

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Аналогичные формулы для специальных функций, которые получили название теорем сложения (теоремы сложения Гегенбауэра, Графа, Неймана и др.), рассматривались в ряде работ. Для примера приведем простейшую теорему сложения для функций Бесселя [2.4]:

$$J_n(x+a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(a) J_k(x).$$

С другой стороны, при рассмотрении физических задач возникает потребность в представлении элементарных источников сферических, цилиндрических и плоских полей в виде разложений по специальным функциям, определяемых геометрией задачи. Большинство указанных формул обобщается в терминах теорем сложения (формул переразложения) (2.39) для уравнений с разделяющимися криволинейными координатами.

Приведем пример теоремы сложения вида (2.39) для плоского уравнения Лапласа в декартовых координатах x, y и полярных координатах ρ, φ . Разлагая экспоненту в ряд, легко получить следующую формулу переразложения:

$$\exp(\lambda(x + iy)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \rho^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi), \quad \lambda - \text{const},$$

где $\exp(\lambda(x + iy))$ — решение уравнения Лапласа в декартовых координатах; $\rho^k \cos k\varphi$, $\rho^k \sin k\varphi$ — решения уравнения Лапласа в полярных координатах; коэффициент разложения $C_{\lambda k} = \lambda^k / k!$.

При разработке теорем сложения основная задача состоит в вычислении коэффициентов $C_{\lambda k}$ в формулах переразложения (2.39). В большинстве случаев коэффициенты разложения могут быть представлены в интегральной форме и вычислены на основании имеющихся таблиц. При этом необходимо идентифицировать полученные интегралы в терминах хорошо изученных специальных функций. В отдельных случаях для коэффициентов удастся получить лишь рекуррентные соотношения. Разрабатываются также теоретико-групповые методы для вычисления коэффициентов $C_{\lambda k}$, называемых матричными элементами смешанного базиса. В прикладных целях метод разделения переменных применяется для аналитического решения краевых задач в случае эллиптических уравнений в областях, ограниченных полными или неполными координатными поверхностями, края которых совпадают с координатными линиями исходной системы криволинейных координат. При этом для поверхностей с краем дополнительно используется теория парных сумматорных или интегральных уравнений с ядрами в виде специальных функций [2.15]. Для решения внешних краевых задач в многосвязных областях, ограниченных двумя или большим числом координатных поверхностей, эффективно используется метод теорем сложения. Впервые метод теорем сложения систематически был применен к решению краевых задач дифракции электромагнитных волн в монографии [2.16]. В последующем многие авторы использовали его для численной реализации дифракционных задач, задач электростатики, волноводных задач, задач теории упругости и распространения акустических волн [2.3], в теории экранирования [2.17, 2.18].

Нами рекомендуется использовать теоремы сложения при необходимости преобразовывать решения уравнений математической физики из одной системы координат, что требуется при суммировании полей отдельных источников, относительно базовой системы координат.

Теоремой сложения назовем формулу, представляющую решение $u_{\text{вр}}(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)})$ в виде суперпозиции решений $v_{\text{ор}}(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)})$:

$$u_{\nu\mu}(q_1^{(j)}, q_2^{(j)}, q_3^{(j)}) = \sum_{\alpha \in N} \sum_{\beta \in M} C_{\alpha\beta}^{\nu\mu} v_{\alpha\beta}(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}), \quad (2.40)$$

где $(q_1^{(j)}, q_2^{(j)}, q_3^{(j)})$ ($j \in [1, 2]$) — ортогональные криволинейные координаты текущей точки (для непрерывных параметров знаки сумм заменяются на интегралы); $u_{\nu\mu}(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)})$, $v_{\alpha\beta}(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)})$ — наборы частных решений уравнений математической физики; ν, μ, α, β — параметры, пробегающие некоторые непрерывные или дискретные множества числовых значений.

Чаще всего теоремы сложения используются для случаев, когда уравнения математической физики допускают разделение переменных в координатах $(q_1^{(j)}, q_2^{(j)}, q_3^{(j)})$. В этом случае решения

$$\begin{aligned} u_{\nu\mu}(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}) &= \tilde{u}_{\nu\mu}(q_1^{(1)}) \cdot v_{\nu\mu}(q_2^{(1)}, q_3^{(1)}), \\ v_{\alpha\beta}(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}) &= \tilde{v}_{\alpha\beta}(q_1^{(2)}) \cdot v_{\alpha\beta}(q_2^{(2)}, q_3^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

и коэффициенты $C_{\alpha\beta}^{\nu\mu}$ выражаются через специальные функции.

Следует отметить, что при решении внешней краевой задачи для нескольких тел, ограниченных координатными поверхностями, постоянные разделения должны быть подобраны таким образом, чтобы функции образовали полные ортогональные системы функций или являлись ядрами интегральных преобразований.

2.6. Специальные функции, используемые при решении дифференциальных уравнений математической физики

В случае основных уравнений математической физики 2-го порядка соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения по каждой криволинейной координате являются уравнениями 2-го порядка, содержащими спектральные параметры (постоянные разделения). При наложении граничных условий возникают задачи на собственные функции, что позволяет применить общий принцип суперпозиции для линейных краевых задач. При этом, как правило, появляются специальные функции. К настоящему времени в литературе по специальным функциям накоплено более двухсот общепризнанных специальных функций, большая часть которых возникает в результате применения метода разделения переменных для решения эталонных краевых задач.

В технических задачах приходится сталкиваться с большим количеством специальных функций: Лежандра, Бесселя, Ганкеля, Матье, гиперболических и многих др. Часть из них рассмотрена в главе 15 настоящего пособия. Более подробные сведения о специальных функциях можно почерпнуть из приведенной литературы [2.7–2.11], а также из источников, упомянутых в [2.1–2.3].

Контрольные вопросы к главе 2

- 2.1. Как классифицируются дифференциальные уравнения математической физики?
- 2.2. Какие уравнения относятся к квазилинейным?
- 2.3. Как формулируется краевая задача?
- 2.4. Назовите виды граничных условий. Приведите примеры.
- 2.5. Как формулируются начальные условия?
- 2.6. Назовите виды граничных задач.
- 2.7. Как устанавливается корректность постановки задачи математической физики?
- 2.8. Какими методами разрешаются краевые задачи математической физики?
- 2.9. В чем преимущества решения краевых задач методом разделения переменных?
- 2.10. Что представляют собой теоремы сложения? В каких случаях они используются?
- 2.11. Что представляют собой специальные функции?

Библиографический список к главе 2

- 2.1. Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики/под ред. Г. И. Марчука. — М.: ИВМ РАН, 2001. — 399 с.
- 2.2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: ИИЛ. Т.1, 1958. — 930 с.
- 2.3. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 768 с.
- 2.4. Ерофеев В. Т. Теоремы сложения. — Минск: Наука и техника, 1989. — 256 с.
- 2.5. Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. — СПб.: Безопасность, 1999. — 415 с.
- 2.6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1971. — 576 с.
- 2.7. Справочник по специальным функциям/под ред. М. Абрамовича, И. Стиган; пер. с англ. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1979. — 830 с.
- 2.8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М., 1974. — 295 с.
- 2.9. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций. — М., 1949. Т. 1. — 798 с.
- 2.10. Гобсон Е. В. Теория сферических и сфероидальных функций. — М.: ИЛ, 1952. — 455 с.
- 2.11. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Гостехтеоретиздат, 1953. — 380 с.

- 2.12. *Котляр Я. М.* Методы математической физики и задачи гидроаэродинамики. Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. шк., 1991. — 208 с.
- 2.13. *Котпенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. — М.: ИЛ, 1963. — 406с.
- 2.14. *Фильчаков П. Ф.* Приближенные методы конформных отображений. — Киев: Наук. Думка, 1964. — 531 с.
- 2.15. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. — Л.: Наука, 1977. — 220 с.
- 2.16. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. — Минск: Наука и техника, 1968. — 583 с.
- 2.17. *Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. — Минск: Университетское, 1988. — 246 с.
- 2.18. *Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т.* Эквивалентные граничные условия в электродинамике. — СПб.: Безопасность, 1999. — 415 с.

Глава 3

Дифференциальные уравнения гиперболического типа

3.1. Простейшие задачи, моделируемые уравнениями гиперболического типа

Уравнения с частными производными 2-го порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Простейшее уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0$$

обычно называют уравнением колебаний струны.

Как и ранее, ограничимся рассмотрением класса линейных уравнений.

3.1.1. Уравнения малых колебаний струны

Каждую точку струны длины l можно охарактеризовать значением ее абсциссы x . Описание процесса колебания струны может быть проведено при помощи задания положения точек струны в различные моменты времени. Для определения положения струны в момент времени t достаточно задать компоненты вектора смещения $\{A_1(x, t), A_2(x, t), A_3(x, t)\}$ точки x в момент t . Предположим, что смещения струны лежат в одной плоскости x, A и что вектор смещения $\vec{A}$ перпендикулярен в любой момент к оси x . Процесс колебания можно описать одной функцией $A(x, t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны. Считаем струну гибкой упругой нитью. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю (рис. 3.1). Это условие выражает собой то, что струна не сопротивляется изгибу.

Рассмотрим малые колебания струны и пренебрежем квадратом $\partial A / \partial x$ по сравнению с единицей. Пользуясь этим условием, подсчитаем удлинение, испытываемое участком струны (x_1, x_2) . Длина дуги этого участка равна

$$l' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\partial A / \partial x)^2} dx \cong x_2 - x_1 = l.$$

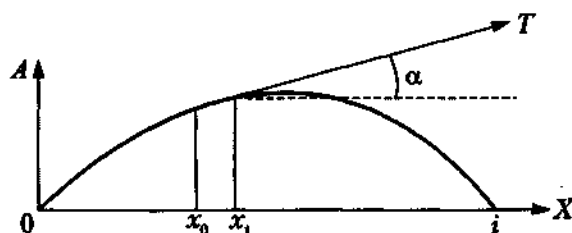


Рис. 3.1. Процесс колебания струны

Таким образом, в пределах принятой нами точности удлинения участков струны в процессе колебания не происходит; отсюда в силу закона Гука следует, что величина натяжения T в каждой точке не меняется со временем. Можно показать также, что натяжение не зависит и от x , то есть

$$T(x) = T_0 = \text{const}.$$

Найдем проекции натяжения на оси x и A (обозначим их $\partial T / \partial x$ и $\partial T / \partial A$):

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2}} \cong T(x),$$

$$\frac{\partial T}{\partial A}(x) = T(x) \sin \alpha \cong T(x) \operatorname{tg} \alpha \cong T(x) \frac{\partial A}{\partial x},$$

где α — угол касательной к кривой $A(x, t)$ с осью x . На участок (x_1, x_2) действуют силы натяжения, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций всех сил на ось x должна быть равна нулю (мы рассматриваем только поперечные колебания). Так как силы инерции и внешние силы по предположению направлены вдоль оси A , то

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_2) - \frac{\partial T}{\partial x}(x_1) = 0 \text{ или } T(x_1) = T(x_2). \quad (3.1)$$

Отсюда в силу произвольности x_1 и x_2 следует, что натяжение не зависит от x , т. е. для всех значений x и t

$$T(x) \equiv T_0. \quad (3.2)$$

После сделанных предварительных замечаний перейдем к выводу уравнения поперечных колебаний струны. Воспользуемся вторым законом Ньютона. Составляющая количества движения участка струны (x_1, x_2) по оси A равна

$$\int_{x_1}^{x_2} A_t(\xi, t) \rho(\xi) d\xi,$$

где ρ — линейная плотность струны.

Приравняем изменение количества движения за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [A(\xi, t_2) - A(\xi, t_1)] d\xi$$

импульсу действующих сил, складывающихся из натяжения $T_0 A_x|_{x=x_2} - T_0 A_x|_{x=x_1}$ в точках x_2 и x_1 и внешней силы, которую будем считать непрерывно распределенной с плотностью (нагрузкой) $F(x, t)$, рассчитанной на единицу длины. В результате получим уравнение поперечных колебаний элемента струны в интегральной форме

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) \left[\frac{\partial A(\xi, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial A(\xi, t_1)}{\partial t} \right] d\xi = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} T_0 \left[\frac{\partial A(x_2, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial A(x_1, \tau)}{\partial x} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для перехода к дифференциальному уравнению предположим существование и непрерывность вторых производных от $A(x, t)$. Тогда формула (3.3) после двукратного применения теоремы о среднем примет вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(\xi^*, t^*) \rho(\xi^*) \Delta t \Delta x = \left\{ T_0 \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(\xi^{**}, t^{**}) \right] + F(\xi^{***}, t^{***}) \right\} \Delta t \Delta x,$$

где

$$\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in [x_1, x_2], \text{ а } t^*, t^{**}, t^{***} \in [t_1, t_2].$$

Сократив на $\Delta x \Delta t$ и переходя к пределу при $x_2 \rightarrow x_1$, $t_2 \rightarrow t_1$, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны:

$$T_0 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - F(x, t). \quad (3.4)$$

В случае постоянной плотности $\rho = \text{const}$ уравнению (3.4) обычно придают вид:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \right), \quad (3.5)$$

¹ Делая предположение о двукратной дифференцируемости функций, мы фактически уславливаемся о том, что будем рассматривать лишь функции, обладающие этим свойством. Таким образом, подобного типа предположение связано с ограничением круга изучаемых физических явлений и не содержит в себе утверждения, что не существует функций, удовлетворяющих интегральному уравнению колебаний и не имеющих вторых производных. Такие функции существуют и представляют значительный практический интерес.

где

$$f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t) \quad (3.6)$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы. При отсутствии внешней силы получим однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (y = at),$$

описывающее свободные колебания струны. Это уравнение является простейшим примером уравнения гиперболического типа.

Если в точке x_0 ($x_1 < x_0 < x_2$) приложена сосредоточенная сила $f_0(t)$ (см. рис. 3.1), то уравнение (3.3) запишется так:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) \left[\frac{\partial A(\xi, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial A(\xi, t_1)}{\partial t} \right] d\xi - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} T_0 \left[\frac{\partial A(x_2, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial A(x_1, \tau)}{\partial x} \right] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку скорости точек струны ограничены, то при $x_1 \rightarrow x_0$ и $x_2 \rightarrow x_0$ интегралы в левой части этого равенства стремятся к нулю, и равенство (3.3) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 \left[\frac{\partial A(x_0 + 0, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial A(x_0 - 0, \tau)}{\partial x} \right] d\tau = - \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Пользуясь теоремой о среднем, сокращая обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $t_2 \rightarrow t_1$, получим:

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = - \frac{1}{T_0} f_0(t).$$

Отсюда видно, что в точке приложения сосредоточенной силы первые производные претерпевают разрыв и дифференциальное уравнение теряет смысл. В этой точке должны выполняться два условия сопряжения:

$$\left. \begin{aligned} & A(x_0 + 0, t) = A(x_0 - 0, t), \\ & \frac{\partial A(x_0 + 0, t)}{\partial x} - \frac{\partial A(x_0 - 0, t)}{\partial x} = - \frac{1}{T_0} f_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

первое из которых выражает непрерывность струны, второе определяет величину излома струны в точке x_0 , зависящую от $f_0(t)$ и натяжения T_0 .

3.1.2. Электрические колебания в проводах

Прохождение электрического тока по проводу с распределенными параметрами характеризуется током i и напряжением u , которые являются функциями положения точки x и времени t . Применим второй закон Кирхгофа к участку провода длиной dx :

$$-\frac{\partial u}{\partial x} dx = iRdx + L \frac{\partial i}{\partial t} dx, \quad (3.9)$$

где R и L — сопротивление и индуктивность, рассчитанные на единицу длины.

Основные уравнения, связывающие количество электричества, притекающее на элемент провода dx за время dt , а также токи утечки из-за несовершенства изоляции, записываются в виде [3.3, с. 253]:

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)] dt = -\frac{\partial i}{\partial x} dx dt. \quad (3.10)$$

$$C[u(x, t + dt) - u(x, t)] dx + Gdx \cdot u dt = \left(C \frac{\partial u}{\partial t} + Gu \right) dx dt, \quad (3.11)$$

где C и G — коэффициенты емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины, причем величина потерь считается пропорциональной напряжению в рассматриваемой точке провода.

Из формул (3.9), (3.10) и (3.11) получаем систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial t} + Gu &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

называемую системой телеграфных уравнений. Эти уравнения являются приближенными в рамках теории электромагнитного поля, поскольку они не учитывают электромагнитных колебаний в среде, окружающей провод.

Чтобы получить одно уравнение, определяющее функцию i , продифференцируем первое равенство (3.12) по x , второе — по t , умножив его на C . Производя вычитание в предположении постоянства коэффициентов, найдем:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + G \frac{\partial u}{\partial x} - CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - CR \frac{\partial i}{\partial t} = 0.$$

Заменяя $\partial u / \partial x$ его значением из второго уравнения (3.12), получим уравнение для тока

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + GL) \frac{\partial i}{\partial t} + GRi. \quad (3.13)$$

Аналогично выглядит уравнение для напряжения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (CR + GL) \frac{\partial u}{\partial t} + GRu. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.13) или (3.14) называется телеграфным уравнением. Если можно пренебречь потерями через изоляцию и если сопротивление очень мало ($G \cong R \cong 0$), то можно прийти к известному уравнению колебаний:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(a = \sqrt{\frac{1}{LC}} \right). \quad (3.15)$$

3.1.3. Уравнения гидродинамики

Для характеристики движения жидкости пользуются функциями $v_i(x, y, z, t)$, $i \in [1, 3]$, представляющими компоненты вектора скорости $\vec{v}$ в точке (x, y, z) в момент t (эйлеровы переменные). Величинами, характеризующими движение жидкости, являются также плотность $\rho(x, y, z, t)$, давление $p(x, y, z, t)$ и плотность внешних действующих сил $\vec{F}(x, y, z, f)$ (если они имеются), рассчитанная на единицу массы.

Рассмотрим некоторый объем жидкости T и подсчитаем действующие на него силы. Пренебрегая силами трения, обусловленными вязкостью, т. е. рассматривая идеальную жидкость, получим для результирующей сил давления выражение в виде поверхностного интеграла

$$-\iint_S p \vec{n} dS, \quad (3.16)$$

где S — поверхность объема T , $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали.

Преобразуем поверхностный интеграл (3.16) в объемный, тогда

$$-\iint_S p \vec{n} dS = -\iiint_T \text{grad } p d\tau. \quad (3.17)$$

При вычислении ускорения какой-либо точки жидкости необходимо учесть перемещение самой точки. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — уравнение траектории этой точки. Вычислим производную скорости по времени

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v}{\partial y} v_2 + \frac{\partial v}{\partial z} v_3 = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v,$$

где

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Уравнение движения жидкости выражает обычную связь между ускорением частиц и действующими на них силами

$$\iiint_T \rho \frac{dv}{dt} d\tau = -\iiint_T \text{grad } p d\tau + \iiint_T \rho \vec{F} d\tau, \quad (3.18)$$

где последний интеграл представляет собой равнодействующую внешних сил, приложенных к объему T . Отсюда в силу произвольности объема T получаем уравнение движения идеальной жидкости в форме Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F}. \quad (3.19)$$

Перейдем к выводу уравнения непрерывности. Если внутри T нет никаких источников или стоков, то изменение в единицу времени количества жидкости, заключенной внутри T , равно потоку через границу S :

$$\frac{d}{dt} \iiint_T \rho d\tau = - \iint_S \rho \vec{v} \vec{n} ds. \quad (3.20)$$

Преобразование поверхностного интеграла в объемный дает

$$\iiint_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) d\tau = 0.$$

Так как это равенство справедливо для сколь угодно малых объемов, то отсюда следует уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (3.21)$$

К уравнениям (3.19) и (3.21) следует присоединить термодинамическое уравнение состояния в виде:

$$p = f(\rho).$$

Следовательно, получаем систему пяти уравнений с пятью неизвестными функциями v_x, v_y, v_z, p, ρ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) &= 0, \\ p &= f(\rho) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

которая представляет замкнутую систему уравнений гидродинамики. Если бы уравнение состояния содержало температуру, то нужно было бы добавить еще уравнение теплопереноса (см. главу 9).

3.1.4. Уравнения акустики

Применим уравнения гидродинамики раздела 3.1.3 к процессу распространения звука в газе. Введем допущения: 1) внешние силы отсутствуют; 2) процесс распространения звука адиабатический, поэтому уравнением состояния служит адиабата Пуассона:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right),$$

где ρ_0 и p_0 — начальная плотность и начальное давление, c_p и c_v — теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме; 3) колебания газа малы, что позволяет пренебречь высшими степенями скоростей, градиентов скоростей и изменения плотности.

Назовем конденсацией газа величину $s(x, y, z, t)$, равную относительному изменению плотности

$$s(x, y, z, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad (3.23)$$

откуда

$$\rho = \rho_0(1 + s). \quad (3.24)$$

Уравнения гидродинамики при сделанных предположениях принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\vec{v}) &= 0, \\ p &= p_0(1 + s)^\gamma \cong p_0(1 + \gamma s), \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \text{grad } p &= \frac{1}{\rho_0} (1 - s + \dots) \text{grad } p = \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p + \dots, \\ \text{div } \rho \vec{v} &= \vec{v} \text{grad } p + \rho \text{div } \vec{v} = \rho_0 \text{div } \vec{v} + \dots, \end{aligned}$$

где точками обозначены члены второго и высших порядков малости.

Вводя обозначение $a^2 = \frac{p_0}{\rho_0}$, перепишем систему (3.25) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -a^2 \text{grad } s, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \vec{v} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Применяя к первому уравнению (3.26) оператор дивергенции и меняя порядок дифференцирования, будем иметь:

$$\text{div} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{v} = -a^2 \text{div}(\text{grad } s) = -a^2 \nabla^2 s = -a^2 \Delta s,$$

где $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Используя второе уравнение (3.26), получим уравнение колебаний

$$\Delta \bar{s} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (3.27)$$

или

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Отсюда и из (3.23) получаем уравнение для плотности

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}. \quad (3.28)$$

Уравнения (3.27) и (3.28) являются уравнениями колебаний. Введем теперь потенциал скоростей и покажем, что он удовлетворяет тому же уравнению колебаний (3.27), что и конденсация.

Из уравнения

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -a^2 \text{grad } s$$

следует

$$\bar{v}(x, y, z, t) = \bar{v}(x, y, z, 0) - a^2 \text{grad} \left(\int_0^t s dt \right), \quad (3.29)$$

где $\bar{v}(x, y, z, 0)$ — начальное распределение скоростей. Если поле скоростей в начальный момент имеет потенциал

$$\bar{v}|_{t=0} = -\text{grad } f(x, y, z), \quad (3.30)$$

то имеет место соотношение

$$\bar{v} = -\text{grad} \left[f(x, y, z) + a^2 \int_0^t s dt \right] = -\text{grad } U, \quad (3.31)$$

которое означает, что существует потенциал скоростей $U(x, y, z, t)$. Знания потенциала скоростей достаточно для описания всего процесса движения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= -\text{grad } U, \\ s &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Подставляя эти значения в уравнение непрерывности

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \bar{v} = 0,$$

получим уравнение колебаний для потенциала

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

или

$$a^2 \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (3.33)$$

Для давления p и скорости $\vec{v}$ также можно получить уравнение колебаний вида (3.33), называемое часто уравнением акустики.

При решении задач для двумерного и одномерного случаев надо в уравнении (3.33) оператор Лапласа заменить оператором $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ и, соответственно, $\partial^2/\partial x^2$. Постоянная

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

имеет размерность скорости и является скоростью распространения звука.

Вычислим скорость звука в воздухе при нормальном атмосферном давлении. В этом случае $\gamma = 1,4$, $\rho_0 = 0,001293 \text{ Г/см}^3$, $p_0 = 1,033 \text{ кГ/см}^2$, следовательно,

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = 336 \text{ м/с.}$$

В случае колебаний газа в ограниченной области на ее границе должны быть заданы определенные граничные условия. Если граница представляет собой твердую непроницаемую стенку, то нормальная составляющая скорости равна нулю, что приводит к условиям

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ или } \frac{\partial s}{\partial n} = 0. \quad (3.34)$$

3.2. Граничные и начальные условия

При математическом описании физического процесса надо прежде всего поставить задачу, т. е. сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса.

Дифференциальные уравнения с обыкновенными и тем более с частными производными имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому в том случае, когда физическая задача приводится к уравнению с частными производными, для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

В случае обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка решение может быть определено начальными условиями, т. е. заданием значений функции и ее первой производной при «начальном» значении аргумента (задача

Коши). Встречаются и другие формы дополнительных условий, когда, например, задаются значения функции в двух точках (задача о цепной линии). Для уравнения с частными производными возможны также различные формы дополнительных условий.

Рассмотрим сперва простейшую задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах. В этой задаче $A(x, t)$ дает отклонение струны от оси x .

Если концы струны $0 \leq x \leq l$ закреплены, то должны выполняться «граничные условия»

$$A(0, t) = 0, \quad A(l, t) = 0. \quad (3.35)$$

Так как процесс колебаний струны зависит от ее начальной формы и распределения скоростей, то следует задать «начальные условия»:

$$\left. \begin{aligned} A(x, t_0) &= \varphi(x), \\ \frac{\partial A(x, t_0)}{\partial t} &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Таким образом, дополнительные условия состоят из граничных и начальных условий, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции точки. В дальнейшем покажем, что эти условия вполне определяют решение уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}. \quad (3.37)$$

Если концы струны движутся по заданному закону, то граничные условия (3.35) принимают другой вид:

$$\left. \begin{aligned} A(0, t) &= \mu_1(t), \\ A(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ — заданные функции времени t . Аналогично ставится задача для продольных колебаний струны или пружины.

Возможны и другие типы граничных условий. Рассмотрим, например, задачу о продольных колебаниях пружины, один конец которой закреплен (точка подвеса), а другой конец свободен. Закон движения свободного конца не задан и зачастую является искомой функцией.

В точке подвеса $x = 0$ отклонение

$$A(0, t) = 0;$$

на свободном конце $x = l$ натяжение пружины

$$T(l, t) = k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad (3.39)$$

равно нулю (нет внешних сил), так что математическая формулировка условия свободного конца имеет вид:

$$\frac{\partial A}{\partial x}(l, t) = 0.$$

Если конец $x = 0$ движется по определенному закону $\mu(t)$, а при $x = l$ задана сила $f(t)$, то

$$A(0, t) = \mu(t), \quad \frac{\partial A(l, t)}{\partial x} = \bar{f}(t) \left(\bar{f}(t) = \frac{1}{k} f(t) \right).$$

Типичным является также условие упругого закрепления, скажем, для $x = l$,

$$k \frac{\partial A(l, t)}{\partial x} = -\alpha A(l, t)$$

или

$$\frac{\partial A(l, t)}{\partial x} = -h A(l, t) \left(h = \frac{\alpha}{k} \right), \quad (3.40)$$

при котором конец $x = l$ может перемещаться, но упругая сила закрепления вызывает на этом конце натяжение, стремящееся вернуть сместившийся конец в прежнее положение. Эта сила, согласно закону Гука, пропорциональна смещению $A(l, t)$; коэффициент пропорциональности α называется коэффициентом жесткости закрепления.

Если точка (система), относительно которой имеет место упругое закрепление, перемещается и ее отклонение от начального положения дается функцией $\theta(t)$, то граничное условие принимает вид:

$$\frac{\partial A(l, t)}{\partial x} = -h[A(l, t) - \theta(t)], \quad \left(h = \frac{\alpha}{k} > 0 \right) \quad (3.41)$$

Условие упругого закрепления на левом конце $x = 0$ имеет вид:

$$\frac{\partial A(0, t)}{\partial x} = -h[A(0, t) - \theta(t)], \quad (h > 0)$$

(формально можно считать, что (3.41) имеет место и при $x = 0$, но $h < 0$).

Следует отметить, что в случае жесткого закрепления (α велико), когда даже небольшие сдвиги конца вызывают большие натяжения, граничное условие (3.41) переходит в условие $A(l, t) = \mu(t)$ ($\alpha = \infty$) при $\mu(t) = \theta(t)$. В случае мягкого закрепления (α мало), при котором большие сдвиги конца вызывают слабые натяжения, граничное условие переходит в условие свободного конца:

$$\frac{\partial A(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (\alpha = 0).$$

В дальнейшем мы будем говорить о трех основных типах граничных условий:

○ граничное условие 1-го рода: $A(0, t) = \mu(t)$ — заданный режим,

- граничное условие 2-го рода: $\frac{\partial A(0,t)}{\partial x} = f(t)$ — заданная сила,
- граничное условие 3-го рода: $\frac{\partial A(0,t)}{\partial x} = h[A(0,t) - \theta(t)]$ — упругое закрепление.

Аналогично задаются граничные условия и на втором конце $x=l$. Если функции, задаваемые в правой части ($\mu(t)$, $f(t)$ или $\theta(t)$), равны нулю, то граничные условия называются однородными.

Комбинируя различные перечисленные типы граничных условий, получим шесть типов простейших краевых задач.

Более сложное граничное условие имеет место, например, при упругом закреплении, не подчиняющемся закону Гука, когда натяжение на конце является нелинейной функцией смещения $A(l,t)$, так что

$$\frac{\partial A(l,t)}{\partial x} = \frac{1}{k} F[A(l,t)]. \quad (3.42)$$

Это граничное условие, в отличие от рассмотренных выше, является нелинейным. Возможны, далее, соотношения между смещениями и натяжениями на разных концах системы. Например, в задачах о колебании кольца, когда $x=0$ и $x=l$ представляют одну и ту же физическую точку, граничные условия принимают вид

$$A(l,t) = A(0,t); \quad \frac{\partial A(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial A(l,t)}{\partial x}, \quad (3.43)$$

то есть сводятся к требованиям непрерывности A и $\partial A / \partial x$. Производные по t могут также входить в граничные условия. Если конец пружины испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости его движения (к концу пружины прикреплена пластинка, плоскость которой перпендикулярна оси пружины), то граничное условие принимает вид:

$$k \frac{\partial A(l,t)}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial A(l,t)}{\partial t}. \quad (3.44)$$

Если к концу $x=l$ пружины прикреплен груз массой m , то при $x=l$ должно выполняться условие:

$$m \frac{\partial^2 A(l,t)}{\partial t^2} = -k \frac{\partial A(l,t)}{\partial x} + mg. \quad (3.45)$$

Для поперечных колебаний струны все граничные условия записываются в той же форме с заменой k на T_0 .

В дальнейшем ограничимся рассмотрением трех простейших типов граничных условий, проводя основное изложение на примере первого типа граничного условия и отмечая лишь попутно особенности, связанные со вторым и третьим условиями.

Сформулируем первую краевую задачу для уравнения (3.5): найти функцию $A(x, t)$, определенную в области $0 \leq x \leq l, t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f(x, t) \text{ для } 0 < x < l, t > 0,$$

граничным

$$A(0, t) = \mu_1(t), \quad A(l, t) = \mu_2(t), \quad t > 0$$

и начальным условиям:

$$A(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial A(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 < x < l.$$

Если на обоих концах берутся граничные условия 2-го или 3-го рода, то соответствующие задачи называются краевыми задачами 2-го и 3-го рода. Если граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ имеют различные типы, то такие краевые задачи называют смешанными, не проводя более подробной их классификации.

Обратимся теперь к рассмотрению предельных случаев поставленной задачи. Влияние граничных условий в точке M_0 , достаточно удаленной от границы, на которой они заданы, сказывается через достаточно большой промежуток времени. Если интересует явление в течение малого промежутка времени, когда влияние границ еще несущественно, то вместо полной задачи можно рассматривать предельную задачу с начальными условиями для неограниченной области.

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f(x, t) \text{ для } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} A(x, 0) &= \varphi(x), \\ \frac{\partial A(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \text{ при } -\infty < x < \infty.$$

Эту задачу часто называют задачей Коши.

Если же изучается явление вблизи одной границы и влияние граничного режима на второй границе не имеет существенного значения на протяжении изучаемого промежутка времени, то приходим к постановке задачи на полугораниченной прямой $0 \leq x < \infty$, с дополнительными условиями:

$$\left. \begin{aligned} A(0, t) &= \mu(t), t \geq 0, \\ A(x, 0) &= \varphi(x), \\ \frac{\partial A(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x) \end{aligned} \right\} 0 \leq x < \infty. \quad (3.46)$$

Характер явления для моментов времени, достаточно удаленных от начального момента $t = 0$, вполне определяется граничными значениями, так как влияние начальных условий благодаря трению, присущему всякой реальной системе, с течением времени ослабевает. Задачи этого типа встречаются особенно часто в случаях, когда система возбуждается периодическим граничным режимом, действующим длительное время. Такие задачи «без начальных условий» (на установившийся режим) формулируются следующим образом:

Найти решение изучаемого уравнения для $0 \leq x \leq l$ и при граничных условиях

$$A(0, t) = \mu_1(t), \quad A(l, t) = \mu_2(t).$$

Аналогично ставится задача без начальных условий для полуограниченной прямой.

В дальнейшем можно рассматривать, помимо основных краевых задач, также предельные задачи:

1. Задачи в бесконечной области, когда одна или обе границы находятся в бесконечности.
2. Задачи без начальных условий (на установившийся режим), когда рассматривается решение, определенное в течение бесконечного промежутка времени.

3.3. Редукция общей задачи

При решении сложной задачи естественно стремиться свести ее решение к решению более простых задач. С этой целью представим решение общей краевой задачи в виде суммы решений ряда частных краевых задач.

Пусть $A_i(x, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + f_i(x, t) \quad (3.47)$$

при $0 < x < l$, $t > 0$ и дополнительным условиям

$$\left. \begin{aligned} A_i(0, t) &= \mu_1^{(i)}(t), \\ A_i(l, t) &= \mu_2^{(i)}(t), \\ A_i(x, 0) &= \varphi^{(i)}(x) \\ \frac{\partial A_i}{\partial t}(x, 0) &= \phi^{(i)}(x). \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

Очевидно, что имеет место суперпозиция решений, т. е. функция

$$A^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i(x, t) \quad (3.49)$$

удовлетворяет аналогичному уравнению с правой частью

$$f^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^n f^{(i)}(x, t) \quad (3.50)$$

и дополнительным условиям, правые части которых суть функции

$$\left. \begin{aligned} \mu_k^{(0)}(t) &= \sum_{i=1}^n \mu_k^{(i)}(t) \quad (k = 1, 2), \\ \varphi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^n \varphi^{(i)}(x), \\ \psi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^n \psi^{(i)}(x). \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

Указанный принцип суперпозиции относится, очевидно, не только к данной задаче, но и к любому линейному уравнению с линейными дополнительными условиями. Решение общей краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f(x, t), \\ (0 < x < l, t > 0), \\ A(0, t) &= \mu_1(t), \\ A(l, t) &= \mu_2(t), \\ A(x, 0) &= \varphi(x), \\ \frac{\partial A(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

может быть представлено в виде суммы

$$A(x, t) = A_1(x, t) + A_2(x, t) + A_3(x, t) + A_4(x, t), \quad (3.53)$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — решения частных краевых задач:

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial^2 A_4}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 A_4}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (0 < x < l, t > 0),$$

$$\left. \begin{aligned} A_1(0, t) &= 0, & A_2(0, t) &= \mu_1(t), & A_3(0, t) &= 0, & A_4(0, t) &= 0, \\ A_1(l, t) &= 0, & A_2(l, t) &= 0, & A_3(l, t) &= \mu_2(t), & A_4(l, t) &= 0, \\ A_1(x, 0) &= \varphi(x), & A_2(x, 0) &= 0, & A_3(x, 0) &= 0, & A_4(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial A_1(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x), & \frac{\partial A_2(x, 0)}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial A_3(x, 0)}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial A_4(x, 0)}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Здесь ограничимся лишь формальной редукцией для того, чтобы характеризовать частные краевые задачи, составляющие основные этапы при решении общей задачи. Аналогичная редукция может быть произведена и для предельных случаев общей краевой задачи.

3.4. Постановка краевых задач для случая многих переменных

В предыдущих разделах рассмотрены постановки краевых задач для случая одной независимой геометрической переменной x (и времени t). Как правило, приходится решать задачи с большим числом независимых переменных $n > 1$ (например, $n = 3$). В этом случае краевая задача может быть поставлена сходным образом:

Требуется найти функцию $A(M, t) = A(x, y, z, t)$, определенную при $t \geq 0$ внутри заданной области T с границей S , удовлетворяющую при $t > 0$ внутри T уравнению

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = a^2 \Delta A + f(M, t) \quad (M(x, y, z) \in T, t > 0), \quad (3.55)$$

граничному условию на S

$$A|_S = \mu(P, t) \quad (P(x, y, z) \in S, t \geq 0), \quad (3.56)$$

($\mu(x, y, z, t)$ есть функция, заданная на S) и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} A(M, 0) &= \varphi(M), \\ \frac{\partial A(M, 0)}{\partial t} &= \psi(M) \end{aligned} \right\} \quad (M(x, y, z) \in T). \quad (3.57)$$

Разложение общей краевой задачи на ряд более простых происходит аналогично предыдущему случаю. Отметим, что возможна также постановка предельных краевых задач для неограниченной области, полупространства и т. д.

3.5. О единственности решения краевых задач, описываемых гиперболическими уравнениями

При решении краевых задач надо убедиться в том, что дополнительные условия:

- достаточны для выделения однозначного решения;
- не переопределяют задачу (т. е. среди них нет несовместных условий).

Это достигается доказательством теоремы единственности решения. Доказательство существования решения обычно тесно связано с методом нахождения решения.

Доказательство теорем существования и единственности решения для соответствующей математической задачи является одним из важнейших этапов решения задачи. При этом необходимо не упускать из виду, что для широкого класса задач эти теоремы доказаны в соответствующей математической литературе. Можно пояснить, как доказывается теорема о существовании и единственности решения соответствующего уравнения, на одном из примеров.

Докажем [3.1, с. 45] следующую теорему: возможно существование только одной функции $A(x, t)$, определенной в области $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ и удовлетворяющей уравнению

$$\rho(x) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial A}{\partial x} \right) + F(x, t) \quad (\rho(x) > 0, k(x) > 0), \quad (3.58)$$

$$0 < x < l, t > 0,$$

начальным и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} A(x, 0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial A(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \\ A(0, t) &= \mu_1(t), \quad A(l, t) = \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

если выполнены условия:

- 1) функция $A(x, t)$ и производные, входящие в уравнение (3.58), а также производная $\partial^2 A / \partial x \partial t$ непрерывны на отрезке $0 \leq x \leq l$ при $t \geq 0$;
- 2) коэффициенты $\rho(x)$ и $k(x)$ непрерывны на отрезке $0 \leq x \leq l$.

Допустим, что существуют два решения рассматриваемой задачи:

$$A_1(x, t), A_2(x, t)$$

и рассмотрим разность $B(x, t) = A_1(x, t) - A_2(x, t)$.

Функция $B(x, t)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial B}{\partial x} \right) \quad (3.60)$$

и однородным дополнительным условиям

$$\left. \begin{aligned} B(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial B(x, 0)}{\partial t} = 0, \\ B(0, t) &= 0, \quad B(l, t) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

а также условию 1 теоремы.

Докажем, что функция $B(x, t)$ тождественно равна нулю.

Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[k \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (3.62)$$

и покажем, что она не зависит от t . Физический смысл функции $E(t)$ очевиден: это полная энергия струны в момент времени t . Продифференцируем $E(t)$ по t , выполняя при этом дифференцирование под знаком интеграла:¹

¹ Для дифференцирования под знаком интеграла достаточно, чтобы получаемое при этом подынтегральное выражение было непрерывно на отрезке $0 \leq x \leq l$ при $t \geq 0$. Это требование в рассматриваемом случае выполнено, так как функция $B(x, t)$ удовлетворяет условию 1 теоремы, а $\rho(x)$ и $k(x)$ — условию 2, т. е. $E(t) = \text{const}$.

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \left[k \left(\frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} \right) + \rho \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \right] dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое правой части, имея в виду

$$u = k(x) \frac{\partial B}{\partial x}, \quad du = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx, \quad v = \frac{\partial B}{\partial t}, \quad dv = \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t},$$

получим

$$\int_0^l k(x) \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} dx = k(x) \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial t} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial B}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right) dx. \quad (3.63)$$

Подстановка обращается в нуль в силу граничных условий (из $B(0, t) = 0$ следует $\partial B(0, t) / \partial t = 0$ и аналогично для $x = l$). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right] dx = \\ &= \int_0^l \frac{\partial B}{\partial t} \left[\rho \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right] dx = 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

в силу уравнения (3.40).

Учитывая начальные условия, получаем:

$$E(t) = \text{const} = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[k \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 \right]_{t=0} dx = 0. \quad (3.65)$$

Так как интеграл равен нулю, а подынтегральная функция больше или равна нулю (сумма квадратов с положительными коэффициентами), то подынтегральная функция равна нулю, то есть

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \equiv 0,$$

откуда и следует тождество

$$B(x, t) = \text{const} = C_0. \quad (3.66)$$

Пользуясь начальным условием, находим:

$$B(x, 0) = C_0 = 0;$$

тем самым доказано, что

$$B(x, t) \equiv 0. \quad (3.67)$$

Следовательно, если существуют две функции $B_1(x, t)$ и $B_2(x, t)$, удовлетворяющие всем условиям теоремы, то $B_1(x, t) = B_2(x, t)$.

Для второй краевой задачи функция $B(x, t) = A_1(x, t) - A_2(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial B(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B(l,t)}{\partial x} = 0, \quad (3.68)$$

и подстановка в формуле (3.64) также обращается в нуль. Дальнейшая часть доказательства теоремы остается без изменений.

Для третьей краевой задачи доказательство требует некоторого видоизменения. Рассматривая по-прежнему два решения $A_1(x,t)$ и $-A_2(x,t)$, получаем для их разности $B(x,t) = A_1(x,t) - A_2(x,t)$ уравнение (3.61) и граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B(0,t)}{\partial x} - h_1 B(0,t) &= 0 \quad (h_1 \geq 0), \\ \frac{\partial B(l,t)}{\partial x} + h_2 B(l,t) &= 0 \quad (h_2 \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

Представим подстановку в (3.63) в виде

$$\left\{ k \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial t} \right\}_0^l = -\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ h_2 B^2(l,t) + h_1 B^2(0,t) \}.$$

Интегрируя dE/dt в пределах от нуля до t , получим:

$$\begin{aligned} E(t) - E(0) &= \int_0^t \int_0^l \frac{\partial B}{\partial t} \left\{ \rho \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (kB)}{\partial x} \right) \right) \right\} dx dt - \\ &\quad - \frac{k}{2} \{ h_2 [B^2(l,t) - B^2(l,0)] + h_1 [B^2(0,t) - B^2(0,0)] \}, \end{aligned}$$

откуда в силу уравнения и начальных условий следует:

$$E(t) = -\frac{k}{2} \{ h_2 [B^2(l,t)] + h_1 [B^2(0,t)] \} \leq 0. \quad (3.70)$$

Так как в силу неотрицательности подинтегральной функции $E(t) \geq 0$, то

$$E(t) \equiv 0, \quad (3.71)$$

а следовательно, и

$$B(x,t) \equiv 0. \quad (3.72)$$

Изложенный здесь метод доказательства теоремы существования и единственности, основанный на использовании выражения полной энергии, широко применяется при доказательстве таких теорем в различных областях математической физики, например в теории ЭМП, теории упругости и гидродинамике.

3.6. Метод разделения переменных при решении задач гиперболического типа

Рассмотрим применение этого метода к задаче о колебаниях струны, закрепленной на концах. Будем искать решение уравнения

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad (3.73)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$A(0, t) = 0, \quad A(l, t) = 0 \quad (3.74)$$

и начальным условиям

$$A(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial A(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \quad (3.75)$$

Уравнение (3.73) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Имея достаточно большое число частных решений, можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение.

Поставим основную вспомогательную задачу: *найти решение* уравнения

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$A(0, t) = 0, \quad A(l, t) = 0$$

и представимое в виде произведения

$$A(x, t) = X(x)T(t), \quad (3.76)$$

где $X(x)$ — функция только переменного x ; $T(t)$ — функция только переменного t .

Подставляя предполагаемую форму решения (3.76) в уравнение (3.73), получим:

$$X''T = \left(\frac{1}{a^2}\right)T''X.$$

Или, после деления на XT :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \left(\frac{1}{a^2}\right)\frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (3.77)$$

Чтобы функция (3.76) была решением уравнения (3.73), равенство (3.77) должно удовлетворяться тождественно, т. е. для всех значений независимых переменных $0 < x < l, t > 0$. Правая часть равенства (3.77) является функцией только переменного t , а левая — только x . Фиксируя, например, некоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части равенства (3.77) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \left(\frac{1}{a^2}\right) \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad (3.78)$$

где λ — постоянная, взятая со знаком минус.

Из соотношения (3.78) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad (3.79)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad T(t) \neq 0. \quad (3.80)$$

Граничные условия (3.54) дают:

$$A(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$A(l, t) = X(l)T(t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (3.81)$$

так как иначе имели бы

$$T(t) \equiv 0 \text{ и } A(x, t) \equiv 0,$$

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения. Для функции $T(t)$ в основной вспомогательной задаче никаких дополнительных условий нет.

Таким образом, в связи с нахождением функции $X(x)$ приходим к простейшей задаче о собственных значениях: *найти значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи:*

$$\left. \begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) = X(l) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения — собственными функциями задачи (3.82). Сформулированную таким образом задачу часто называют задачей Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю или положителен.

1. При $\lambda < 0$ задача не имеет нетривиальных решений. Действительно, общее решение уравнения (3.62) имеет вид:

$$X(x) = C_1 \exp(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \exp(-\sqrt{-\lambda}x).$$

Граничные условия дают:

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 + C_2 = 0; \\ X(l) &= C_1 \exp(\alpha) + C_2 \exp(-\alpha) \quad (\alpha = l\sqrt{-\lambda}), \end{aligned}$$

то есть

$$C_1 = -C_2 \text{ и } C_1 [\exp(\alpha) - \exp(-\alpha)] = 0.$$

В рассматриваемом случае α — действительно и положительно, так что $[\exp(\alpha) - \exp(-\alpha)] \neq 0$. Поэтому

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

2. При $\lambda = 0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения (3.59):

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничные условия дают

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0, \quad X(l) = C_2 l = 0,$$

т. е. $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения может быть записано в виде:

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Граничные условия дают

$$X(0) = D_1 = 0, \quad X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Если $X(x)$ не равно тождественно нулю, то $D_2 \neq 0$, поэтому

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \tag{3.83}$$

или

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

где n — любое целое число.

Следовательно, нетривиальные решения задачи (3.62) возможны лишь при значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где D_n — произвольная постоянная.

Итак, только при значениях λ , равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad (3.84)$$

существуют нетривиальные решения задачи (3.82)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.85)$$

определяемые с точностью до произвольного множителя, который положен равным единице. Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (3.80):

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at, \quad (3.86)$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Возвращаясь к задаче (3.73)–(3.75), заключаем, что функции

$$A_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (3.87)$$

являются частными решениями уравнения (3.73), удовлетворяющими граничным условиям (3.74) и представимыми в виде произведения (3.76) двух функций, одна из которых зависит только от x , другая — от t . Эти решения могут удовлетворить начальным условиям (3.75) исходной задачи только для частных случаев начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Обратимся к решению задачи (3.73)–(3.75) в общем случае. В силу линейности и однородности уравнения (3.73) сумма частных решений

$$A(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (3.88)$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (3.74). Начальные условия позволяют определить A_n и B_n . Потребуем, чтобы функция (3.88) удовлетворяла условиям (3.75):

$$\left. \begin{aligned} A(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ \frac{\partial A(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial A_n(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \right\} \quad (3.89)$$

Из свойств задачи Штурма–Лиувилля следует [3.3], что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, заданная в промежутке $0 \leq x \leq l$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.90)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (3.91)$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (3.92)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (3.93)$$

Сравнение этих рядов с формулами (3.89) показывает, что для выполнения начальных условий надо положить

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n, \quad (3.94)$$

чем полностью определяется функция (3.88), дающая решение исследуемой задачи. Таким образом, получено решение в виде бесконечного ряда (3.88). Если ряд (3.88) расходится или функция, определяемая этим рядом, не является дифференцируемой, то он, конечно, не может представлять решение нашего дифференциального уравнения.

Контрольные вопросы к главе 3

- 3.1. Какие дифференциальные уравнения в частных производных называются уравнениями гиперболического типа?
- 3.2. Какие простейшие физические задачи можно описать уравнениями гиперболического типа?
- 3.3. Какие граничные условия используются при постановке краевых задач, описываемых гиперболическими уравнениями?
- 3.4. Какие начальные условия используются при постановке краевых задач, описываемых гиперболическими уравнениями?
- 3.5. Каким образом доказывается единственность решения краевой задачи с гиперболическими уравнениями?
- 3.6. Какие методы используются при решении краевых задач с гиперболическими уравнениями?
- 3.7. Приведите пример решения краевой задачи с гиперболическими уравнениями методом разделения переменных.

Библиографический список к главе 3

- 3.1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: ИИЛ. Т. 1, 1958. — 930 с.
- 3.2. *Кошляков Н. С., Глиер Э. Б., Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 768 с.
- 3.3. *Матханов П. Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. Учебн. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1972. — 336 с.

Глава 4

Дифференциальные уравнения параболического типа

4.1. Простейшие задачи по теплопроводности, приводящие к уравнению параболического типа

Уравнения с частными производными 2-го порядка параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Простейшее уравнение параболического типа

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad (y = a^2 t)$$

обычно называют уравнением теплопроводности.

4.1.1. Линейная задача о распространении тепла

Рассмотрим однородный стержень длины l , теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Если концы стержня поддерживать при постоянных температурах A_1 и A_2 , то, как хорошо известно, вдоль стержня устанавливается линейное распределение температуры (рис. 4.1)

$$A(x) = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{l} x. \quad (4.1)$$

При этом от более нагретого к менее нагретому концу стержня будет протекать тепло. Количество тепла, протекающее через сечение стержня площадью S за единицу времени, дается экспериментальной формулой

$$Q = -k \frac{A_2 - A_1}{l} S = -k \frac{\partial A}{\partial x} S, \quad (4.2)$$

где k — коэффициент теплопроводности, зависящий от материала стержня.

Величина теплового потока считается положительной, если тепло течет в сторону возрастания x .

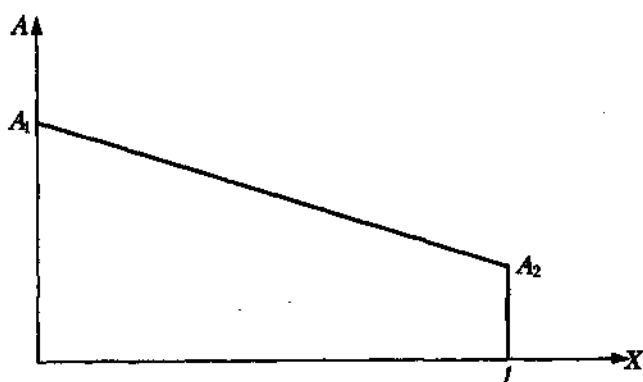


Рис. 4.1. Распределение температуры вдоль стержня, если его концы поддерживаются при постоянных температурах A_1 и A_2

Рассмотрим процесс распространения температуры в стержне. Этот процесс может быть описан функцией $A(x, t)$, представляющей температуру в сечении x в момент времени t . Найдем уравнение, которому должна удовлетворять функция $A(x, t)$. Для этого сформулируем физические закономерности, определяющие процессы, связанные с распространением тепла.

1. Если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой (закон Фурье). Количество тепла, протекающее через сечение x за промежуток времени $(t, t + dt)$, равно

$$dQ = qSdt, \quad (4.3)$$

где

$$q = -k(x) \frac{\partial A}{\partial x} \quad (4.4)$$

— плотность теплового потока, равная количеству тепла, протекшего в единицу времени через площадь в 1 см^2 .

Этот закон представляет обобщение формулы (4.2). Ему можно также придать интегральную форму

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} dt, \quad (4.5)$$

где Q — количество тепла, протекающее за промежуток времени (t_1, t_2) через сечение x . Если стержень неоднороден, то k является функцией x .

2. Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на ΔA , равно

$$Q = c m \Delta A = c \rho V \Delta A, \quad (4.6)$$

где c — удельная теплоемкость, m — масса тела, ρ — его плотность, V — объем.

Если изменение температуры имеет различную величину на разных участках стержня или если стержень неоднороден, то

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S \Delta A(x) dx. \quad (4.7)$$

3. Внутри стержня может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и т. д.). Выделение тепла может быть characterized плотностью тепловых источников $F(x, t)$ в точке x в момент t . В результате действия этих источников на участке стержня $(x, x + dx)$ за промежуток времени $(t, t + dt)$ выделится количество тепла

$$dQ = SF(x, t) dx dt \quad (4.8)$$

или в интегральной форме

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt, \quad (4.9)$$

где Q — количество тепла, выделяющегося на участке стержня (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2) .

Уравнение теплопроводности получается при подсчете баланса тепла на некотором отрезке (x_1, x_2) за некоторый промежуток времени (t_1, t_2) . Применяя закон сохранения энергии и пользуясь формулами (4.5), (4.7) и (4.9), можно написать равенство

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[k \frac{\partial A(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial A(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{x_1}^{x_2} c\rho [A(\xi, t_2) - A(\xi, t_1)] d\xi, \end{aligned} \quad (4.10)$$

которое и представляет уравнение теплопроводности в интегральной форме.

Чтобы получить уравнение теплопроводности в дифференциальной форме, предположим, что функция $A(x, t)$ имеет непрерывные производные $\partial^2 A / \partial x^2$ и $\partial A / \partial t$.

Пользуясь теоремой о среднем, получаем равенство

$$\begin{aligned} \left[k \frac{\partial A(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial A(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right] \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} \Delta t + F(x_1, t_1) \Delta x \Delta t = \\ = \{ c\rho [A(\xi, t_2) - A(\xi, t_1)] \}_{\xi=x_1}^{x_2} \Delta x, \end{aligned} \quad (4.11)$$

которое при помощи теоремы о конечных приращениях можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \right] \Big|_{x=x_3}^{x=x_4} \Delta t \Delta x + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \\ = \left[c\rho \frac{\partial A}{\partial t}(x, t) \right] \Big|_{t=t_3}^{t=t_4} \Delta x \Delta t, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где t_3, t_4, t_5 и x_3, x_4, x_5 — промежуточные точки интервалов (t_1, t_2) и (x_1, x_2) .

Отсюда, после сокращения на произведение $\Delta x \Delta t$, находим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial A}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_3}^{x=x_4} + F(x, t) \Big|_{t=t_3}^{t=t_4} = c\rho \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{x=x_3}^{x=x_4}. \quad (4.13)$$

Все эти рассуждения относятся к произвольным промежуткам (x_1, x_2) и (t_1, t_2) . Переходя к пределу при $x_1, x_2 \rightarrow x$ и $t_1, t_2 \rightarrow t$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial A}{\partial x} \right) + F(x, t) = c\rho \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (4.14)$$

называемое уравнением *теплопроводности*. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если стержень однороден, то k, c, ρ можно считать постоянными, и уравнение обычно записывают в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f(x, t), \\ a^2 &= \frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho}, \end{aligned}$$

где a^2 — постоянная, называемая коэффициентом *температуропроводности*. Если источники отсутствуют ($F(x, t) = 0$), то уравнение теплопроводности принимает простой вид:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}. \quad (4.15)$$

2. Плотность тепловых источников может зависеть от температуры. В случае теплообмена с окружающей средой, подчиняющегося закону Ньютона, количество тепла, теряемого стержнем, рассчитанное на единицу длины и времени, равно

$$F_0 = h(A - \theta),$$

где h — коэффициент теплообмена; $\theta(x, t)$ — температура окружающей среды. Таким образом, плотность тепловых источников в точке x в момент t равна

$$F = F_1(x, t) - h(A - \theta), \quad (4.16)$$

где $F_1(x, t)$ — плотность других источников тепла.

Если стержень однороден, то уравнение теплопроводности с боковым теплообменом имеет следующий вид:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \alpha A + f(x, t),$$

где $\alpha = \frac{h}{c\rho}$, $f(x, t) = \alpha\theta(x, t) + \frac{F_1(x, t)}{c\rho}$ — известная функция.

Коэффициенты k и c , как правило, являются медленно меняющимися функциями температуры. Поэтому сделанное выше предположение о постоянстве этих коэффициентов возможно лишь при условии рассмотрения небольших интервалов изменения температуры. Изучение температурных процессов в большом интервале изменения температур приводит к квазилинейному уравнению теплопроводности, которое для неоднородной среды запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(A, x) \frac{\partial A}{\partial x} \right) + F(x, t) = C(A, x) \rho(A, x) \frac{\partial A}{\partial t}.$$

4.1.2. Уравнение диффузии

Если среда неравномерно заполнена газом, то имеет место диффузия его из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией. Это же явление имеет место и в растворах, если концентрация растворенного вещества в объеме непостоянна.

Рассмотрим процесс диффузии в полой трубке или в трубке, заполненной пористой средой, предполагая, что во всякий момент времени концентрация газа (раствора) по сечению трубки одинакова. Тогда процесс диффузии может быть описан функцией $A(x, t)$, представляющей концентрацию в сечении x в момент времени t .

Согласно закону Нернста, масса газа, протекающая через сечение x за промежуток времени $(t, t + dt)$, равна

$$\begin{aligned} dQ &= -D \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} S dt = W S dt, \\ W &= -D \frac{\partial A}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где D — коэффициент диффузии; S — площадь сечения трубки; $W(x, t)$ — плотность диффузионного потока, равная массе газа, протекающей в единицу времени через единицу площади.

По определению концентрации, количество газа в объеме V равно

$$Q = AV,$$

отсюда получаем, что изменение массы газа на участке трубки (x_1, x_2) при изменении концентрации на ΔA равно

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x) \Delta A \cdot S dx,$$

где $c(x)$ — коэффициент пористости (коэффициентом пористости называется отношение объема пор к полному объему V_0 , равному в нашем случае $S dx$).

Составим уравнение баланса массы газа на участке (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2) :

$$\begin{aligned} S \int_{t_1}^{t_2} \left[D(x_2) \frac{\partial A(x_2, \tau)}{\partial x} - D(x_1) \frac{\partial A(x_1, \tau)}{\partial x} \right] d\tau = \\ = S \int_{x_1}^{x_2} c(\xi) [A(\xi, t_2) - A(\xi, t_1)] d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial A}{\partial x} \right) = c \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (4.18)$$

являющееся уравнением диффузии. Оно вполне аналогично уравнению теплопроводности. При выводе этого уравнения мы считали, что в трубке нет источников вещества и диффузия через стенки трубки отсутствует. Учет этих явлений приводит к уравнениям, сходным с уравнениями (4.14) и (4.16).

Если коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad (4.19)$$

где $a^2 = \frac{D}{c}$.

Если коэффициент пористости $c = 1$, а коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}. \quad (4.20)$$

4.2. Граничные и начальные условия

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальное условие состоит лишь в задании значений функции $A(x, t)$ в начальный момент t_0 .

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На конце стержня $x = 0$ задана температура

$$U(0, t) = \mu(t),$$

где $\mu(t)$ — функция, заданная в некотором промежутке $t_0 \leq t \leq T$, причем T есть промежуток времени, в течение которого изучается процесс.

2. На конце $x = l$ задано значение производной

$$\frac{\partial A(l, t)}{\partial x} = v(t).$$

К этому условию мы приходим, если задана величина теплового потока $Q(l, t)$, протекающего через торцевое сечение стержня,

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial A(l, t)}{\partial x},$$

откуда $\partial A(l, t) / \partial x = v(t)$, где $v(t)$ — известная функция, выражающаяся через заданный поток $Q(l, t)$ по формуле

$$v(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

3. На конце $x = l$ задано линейное соотношение между производной и функцией:

$$\frac{\partial A(l, t)}{\partial x} = -\lambda [A(l, t) - \theta(t)].$$

Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой θ известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение $x = l$,

$$Q = h(A - \theta)$$

и

$$Q = -k \frac{\partial A}{\partial x},$$

получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде

$$\frac{\partial A(l, t)}{\partial x} = -\lambda [A(l, t) - \theta(t)].$$

где $\lambda = h/k$ — коэффициент теплообмена через стенку, $\theta(t)$ — некоторая заданная функция. Для конца $x = 0$ стержня $(0, l)$ третье граничное условие имеет вид:

$$\frac{\partial A(0, t)}{\partial x} = \lambda [A(0, t) - \theta(t)].$$

Граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ могут быть разных типов, так что число различных задач велико.

Первая краевая задача состоит в отыскании решения $A = A(x, t)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial A}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad \text{при } 0 < x < l, 0 < t < T, \quad (4.21)$$

удовлетворяющего условиям

$$A(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.22)$$

$$A(0, t) = \mu_1(t), \quad A(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.23)$$

где $\varphi(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ — заданные функции.

Аналогично ставятся и другие краевые задачи с различными комбинациями краевых условий при $x = 0$ и $x = l$. Возможны краевые условия более сложного типа, чем те, которые были рассмотрены выше.

Пусть, например, на конце $x = 0$ стержня помещена сосредоточенная теплоемкость C_1 (например, тело с большой теплопроводностью, вследствие чего температуру по всему объему этого тела можно считать постоянной) и происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Тогда краевое условие при $x = 0$ (выражающее уравнение теплового баланса) будет иметь вид

$$C_1 \frac{\partial A}{\partial t} = k \frac{\partial A}{\partial x} - h(A - A_0), \quad (4.24)$$

где A_0 — температура внешней среды.

Это условие содержит производную $\partial A / \partial t$ (или $\partial^2 A / \partial x^2$, если учесть уравнение (4.19)).

Если среда неоднородна и коэффициенты уравнения являются разрывными функциями, то промежуток $(0, T)$, в котором ищется решение задачи, разбивается точками разрыва коэффициентов на несколько частей, внутри которых функция A удовлетворяет уравнению теплопроводности, а на границах — условиям сопряжения.

В простейшем случае эти условия заключаются в непрерывности температуры и непрерывности теплового потока:

$$A(x_i - 0, t) = A(x_i + 0, t), \quad (4.25)$$

$$k(x_i - 0) \frac{\partial A(x_i - 0, t)}{\partial x} = k(x_i + 0) \frac{\partial A(x_i + 0, t)}{\partial x}, \quad (4.26)$$

где x_i — точки разрыва коэффициентов.

Кроме названных здесь задач часто встречаются их предельные случаи. Рассмотрим процесс теплопроводности в очень длинном стержне. В течение небольшого промежутка времени влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня сказывается весьма слабо, и температура на этом участке определяется лишь начальным распределением температуры. В этом случае точный учет длины стержня не имеет значения, так как изменение длины стержня не окажет существенного влияния на температуру интересующего нас участка. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень имеет бесконечную длину. Таким образом, ставится задача с начальными условиями (задача Коши) о распределении температуры на бесконечной прямой.

Найти решение уравнения теплопроводности в области $-\infty < x < +\infty$ и $t \geq t_0$, удовлетворяющее условию

$$A(x, t_0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (4.27)$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция.

Аналогично, если участок стержня, температура которого нас интересует, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальными условиями. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень полубесконечен и координата, отсчитываемая от конца, меняется в пределах $0 \leq x < \infty$. Приведем в качестве примера формулировку первой краевой задачи для полубесконечного стержня.

Найти решение уравнения теплопроводности в области $0 < x < \infty$ и $t_0 \leq t$, удовлетворяющее условиям

$$\left. \begin{aligned} A(x, t_0) &= \varphi(x) \quad (0 < x < \infty), \\ A(0, t) &= \mu(t) \quad (t \geq t_0), \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

где $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ — заданные функции.

Приведенные задачи представляют собой предельный случай (вырождение) основных краевых задач. Возможны предельные случаи основной задачи и другого типа, когда пренебрегают точным учетом начальных условий. Влияние начальных условий при распространении температуры по стержню ослабевает с течением времени. Если интересующий нас момент достаточно удален от начального, то температура стержня определяется граничными условиями, так как изменение начальных условий не изменило бы температурного состояния стержня (в пределах точности наблюдения). В этом случае можно считать, что опыт продолжался бесконечно долго, а начальные условия тем самым отпадают.

Таким образом, приходим к краевым задачам без начальных условий, когда ищется решение уравнения теплопроводности для $0 \leq x \leq l$ и $-\infty < t$, удовлетворяющее условиям

$$A(0, t) = \mu_1(t), \quad A(l, t) = \mu_2(t). \quad (4.29)$$

В зависимости от характера граничного режима возможны и другие виды задач без начальных условий.

Весьма важной является задача без начальных условий для полубесконечного стержня ($l = \infty$), когда требуется найти решение уравнения теплопроводности для $0 < x < \infty$, $t > -\infty$, удовлетворяющее условию

$$A(0, t) = \mu(t), \quad (4.30)$$

где $\mu(t)$ — заданная функция.

Наиболее часто встречаются задачи без начальных условий при периодическом граничном режиме

Естественно считать, что по прошествии большого промежутка времени температура стержня также меняется по периодическому закону с той же частотой. Однако если захотеть точно учитывать начальные условия, то формально никогда не получим периодического решения, так как влияние начальных условий хотя и будет ослабевать с течением времени, но в нуль не обратится; учитывать это влияние ввиду ошибок наблюдения нет никакого смысла. Рассматривая периодическое решение приходится пренебрегать влиянием начальных данных.

Постановка краевых задач, изложенная выше, относится, конечно, не только к уравнению с постоянными коэффициентами. Под словами «уравнение теплопроводности» можно понимать любое из уравнений предыдущих пунктов.

Помимо перечисленных линейных краевых задач, ставятся также задачи с нелинейными граничными условиями; например, вида

$$k \frac{\partial A(0, t)}{\partial x} = \sigma [A^4(0, t) - \theta^4(0, t)]. \quad (4.31)$$

Граничное условие (4.31) соответствует излучению по закону Стефана—Больцмана с торца $x = 0$ в среду с температурой $\theta(t)$.

Остановимся более подробно на постановке краевых задач и рассмотрим первую краевую задачу для ограниченной области. Решением первой краевой задачи будем называть функцию $A(x, t)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $A(x, t)$ определена и непрерывна в замкнутой области

$$0 \leq x \leq l, t_0 \leq t \leq T;$$

- 2) $A(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности в открытой области

$$0 < x < l, t_0 < t;$$

- 3) $A(x, t)$ удовлетворяет начальному и граничным условиям, то есть

$$A(x, t_0) = \varphi(x), \quad A(0, t) = \mu_1(t), \quad A(l, t) = \mu_2(t),$$

где $\varphi(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения

$$\varphi(0) = \mu_1(t_0) = [A(0, t_0)]; \quad \varphi(l) = \mu_2(t_0) = [A(l, t_0)],$$

необходимым для непрерывности $A(x, t)$ в замкнутой области.

Рассмотрим плоскость состояний (x, t) (рис. 4.2). В поставленной задаче ищется функция $A(x, t)$, определенная внутри прямоугольника $ABCD$. Эта область определяется самой постановкой задачи, так как изучается процесс распространения тепла в стержне $0 \leq x \leq l$ за промежуток времени $t_0 \leq t \leq T$, в течение которого известен тепловой режим на краях. Пусть $t_0 = 0$. Предполагаем, что $A(x, t)$ удовлетворяет уравнению только при $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, но не при $t = 0$ (сторона AB) и не при $x = 0$, $x = l$ (стороны AD и BC), где начальными и граничными условиями непосредственно задаются значения этой функции. Требование удовлетворения уравнения, например, при $t = 0$, сводится к требованию существования производной $\varphi'' = \partial^2 A(x, 0) / \partial x^2$, входящей в уравнение. Этим требованием ограничивается область изучаемых физических явлений, исключаются из рассмотрения те функции, для которых это требование не выполняется. Условие 3 без предположения непрерывности $A(x, t)$ в области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ (т. е. в замкнутом прямоугольнике $ABCD$) или какого-либо другого условия, заменяющего это предположение, теряет смысл.

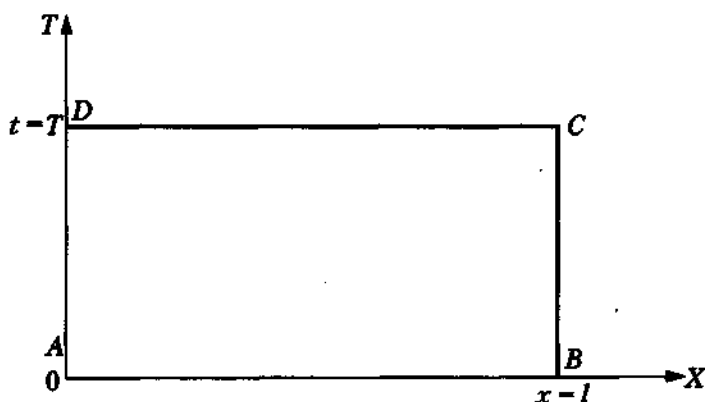


Рис. 4.2. Плоскость состояний (x, t)

Действительно, рассмотрим функцию $B(x, t)$, определенную следующим образом:

$$\begin{aligned} B(x, t) &= C \quad (0 < x < l, \quad 0 < t \leq T), \\ B(x, 0) &= \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l), \\ B(0, t) &= \mu_1(t), \\ B(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq T),$$

где C — произвольная постоянная. Функция $B(x, t)$, очевидно, удовлетворяет условию 2, а также граничным условиям. Однако эта функция не представляет процесса распространения температуры в стержне при начальной температуре

$\varphi(x) \neq C$ и граничных температурах $\mu_1(t) \neq C$ и $\mu_2(t) \neq C$, так как она разрывна при $t = 0$, $x = 0$, $x = l$.

Непрерывность функции $A(x, t)$ при $0 < x < l$, $0 < t < T$ следует из того, что эта функция удовлетворяет уравнению. Таким образом, требование непрерывности $A(x, t)$ при $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, по существу, относится только к тем точкам, где задаются граничные и начальные значения. В дальнейшем под словами «решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям», будем подразумевать функцию, удовлетворяющую требованиям 1, 2 и 3, не оговаривая эти условия каждый раз, если в этом нет необходимости.

Аналогично ставятся и другие краевые задачи, в том числе задачи на бесконечном стержне и задачи без начальных условий.

Для задач с несколькими независимыми геометрическими переменными все сказанное ранее сохраняет силу. В этих задачах при $t = t_0$ задается начальная температура на поверхности тела — граничные условия. Можно рассматривать также и задачи для бесконечной области.

В отношении каждой из поставленных задач возникают следующие вопросы:

- 1) существование решения,
- 2) единственность решения поставленной задачи,
- 3) непрерывная зависимость решения от дополнительных условий.

Если поставленная задача имеет несколько решений, то слова «решение задачи» не имеют определенного смысла. Поэтому, прежде чем говорить о решении задачи, необходимо доказать его единственность. Для практики наиболее существенным является вопрос 1, так как при доказательстве существования решения обычно дается способ вычисления решения.

Как было отмечено, процесс называется физически определенным, если при малом изменении начальных и граничных условий задачи ее решение меняется мало. В дальнейшем будет доказано, что процесс распространения тепла физически определяется своими начальными и граничными условиями, т. е. небольшое изменение начального и граничных условий мало изменяет и само решение.

4.3. Принцип максимального значения

Рассмотрим параболическое уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial A}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial A}{\partial x} + \gamma A.$$

Как уже отмечалось это, уравнение подстановкой

$$A = \exp(\mu x + \lambda t) \cdot B \text{ при } \mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$$

приводится к виду

$$\frac{\partial B}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}.$$

Докажем следующее свойство решений этого уравнения, которое будем называть *принципом максимального значения*.

Если функция $B(x, t)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq l$, удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial B}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad (4.32)$$

в точках области $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, то максимальное и минимальное значения функции $B(x, t)$ достигаются или в начальный момент, или в точках границы $x = 0$, $x = l$.

Функция $B(x, t) = \text{const}$, очевидно, удовлетворяет уравнению теплопроводности и достигает своего максимального (минимального) значения в любой точке. Однако это не противоречит теореме, так как из ее условия следует, что если максимальное (минимальное) значение достигается внутри области, то оно также (а не только) должно достигаться или при $t = 0$, или при $x = 0$, или при $x = l$.

Физический смысл этой теоремы очевиден: если температура на границе и в начальный момент не превосходит некоторого значения T_r , то при отсутствии источников внутри тела не может возникнуть температура, большая T_r .

Остановимся сначала на доказательстве теоремы для максимального значения. Доказательство ведется от противного. Обозначим через T_r максимальное значение $B(x, t)$ при $t = 0$ ($0 \leq x \leq l$) или при $x = 0$, или при $x = l$ ($0 \leq t \leq T$) и допустим, что в некоторой точке (x_0, t_0) ($0 < x_0 < l$, $0 < t_0 \leq T$) функция $B(x, t)$ достигает своего максимального значения, равного

$$B(x_0, t_0) = T_r + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$.

Сравним знаки левой и правой частей уравнения (4.32) в точке (x_0, t_0) . Так как в точке (x_0, t_0) функция достигает своего максимального значения, то должно быть

$$\frac{\partial B(x_0, t_0)}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 B(x_0, t_0)}{\partial x^2} \leq 0. \quad (4.33)$$

Далее, так как $B(x_0, t)$ достигает максимального значения при $t = t_0$, то

$$\frac{\partial B(x_0, t_0)}{\partial t} \geq 0. \quad (4.34)$$

Сравнивая знаки правой и левой частей уравнения (4.32), видим, что они различны. Однако это рассуждение еще не доказывает теоремы, так как правая и левая части могут быть равны нулю, что не влечет за собой противоречия. Это рассуждение приведено, чтобы яснее выделить основную идею доказательства.

Для полного доказательства найдем точку (x_1, t_1) , в которой $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \leq 0$ и $\frac{\partial B}{\partial t} > 0$, и рассмотрим вспомогательную функцию

$$A(x, t) = B(x, t) + k(t_0 - t), \quad (4.35)$$

где k — некоторое постоянное число. Очевидно, что

$$A(x_0, t_0) = B(x_0, t_0) = T_f + \epsilon.$$

Выберем $k > 0$ так, чтобы kT был меньше $0,5\epsilon$, т. е. $k < (\epsilon/2T)$. Тогда максимальное значение $A(x, t)$ при $t = 0$ или при $x = 0, x = l$ не будет превосходить $T_f + 0,5\epsilon$, то есть

$$A(x, t) \leq T_f + 0,5\epsilon \quad (\text{при } t = 0, \text{ или } x = 0, x = l), \quad (4.36)$$

так как для этих аргументов первое слагаемое формулы (4.35) не превосходит T_f , а второе $-0,5\epsilon$.

В силу непрерывности функции $A(x, t)$ она должна в некоторой точке (x_1, t_1) достигать своего максимального значения. Очевидно, что

$$A(x_1, t_1) \geq A(x_0, t_0) = T_f + \epsilon.$$

Поэтому $t_1 > 0$ и $0 < x_1 < l$, так как при $t = 0$ или $x = 0, x = l$ имеет место неравенство (4.35). В точке (x_1, t_1) , по аналогии с (4.33) и (4.34), должно быть $\partial^2 A(x_1, t_1) / \partial x^2 \leq 0, \partial A(x_1, t_1) / \partial t \geq 0$. Учитывая (4.35), находим:

$$\frac{\partial^2 B(x_1, t_1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A(x_1, t_1)}{\partial x^2} \leq 0,$$

$$\frac{\partial B(x_1, t_1)}{\partial t} = \frac{\partial A(x_1, t_1)}{\partial t} + k \geq k > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial B(x_1, t_1)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 A(x_1, t_1)}{\partial x^2} \geq k > 0,$$

т. е. уравнение (4.33) во внутренней точке (x_1, t_1) не удовлетворяется. Тем самым доказано, что решение $B(x, t)$ уравнения теплопроводности (4.33) внутри области не может принимать значений, превосходящих наибольшее значение $B(x, t)$ на границе (т. е. при $t = 0, x = 0, x = l$).

Аналогично может быть доказана и вторая часть теоремы о минимальном значении. Впрочем, это не требует отдельного доказательства, так как функция $B_1 = -B$ имеет максимальное значение там, где B — минимальное.

Можно теперь установить ряд следствий из принципа максимального значения. Прежде всего, необходимо доказать теорему единственности для первой краевой задачи.

4.4. Единственность решения краевых задач, описываемых параболическими уравнениями

Как уже отмечалось в главе 3, при решении краевых задач необходимо убедиться в том, что дополнительные условия достаточны для выделения однозначного решения; не переопределяют задачу (т. е. среди них нет несовместных условий). Это достигается доказательством теоремы единственности решения. Доказательство теоремы единственности решения для соответствующей математической задачи является одним из важнейших этапов решения задачи. Можно пояснить, как доказывается теорема единственности решения соответствующего параболического уравнения на одном из примеров.

Докажем [4.1, с. 193] следующую теорему единственности: если две функции $A_1(x, t)$ и $A_2(x, t)$, определенные и непрерывные в области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (\text{для } 0 < x < l, t > 0), \quad (4.37)$$

одинаковым начальным и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} A_1(x, 0) &= A_2(x, 0) = \varphi(x), \\ A_1(0, t) &= A_2(0, t) = \mu_1(t), \\ A_1(l, t) &= A_2(l, t) = \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

то $A_1(x, t) \equiv A_2(x, t)$.

Для доказательства теоремы рассмотрим функцию

$$B(x, t) = A_2(x, t) - A_1(x, t).$$

Поскольку функции $A_1(x, t)$ и $A_2(x, t)$ непрерывны при $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, то и функция $B(x, t)$, равная их разности, непрерывна в той же области. Как разность двух решений уравнения теплопроводности в области $0 < x < l$, $t > 0$, функция $B(x, t)$ является также решением уравнения теплопроводности в этой области. Принцип максимального значения, только что рассмотренный, применим и к этой функции: она достигает своих экстремальных значений (минимального или максимального) при $t = 0$, при $x = 0$ или при $x = l$. Однако по условию задачи

$$B(x, 0) = 0, B(0, t) = 0, B(l, t) = 0,$$

поэтому

$$B(x, t) \equiv 0,$$

т. е.

$$A_1(x, t) \equiv A_2(x, t).$$

Отсюда следует, что решение первой краевой задачи единственно.

4.5. Метод разделения переменных

Рассмотрим применение метода разделения переменных при решении параболического уравнения на примере одномерного уравнения (4.37):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (0 < x < l, t > 0) \quad (4.39)$$

с условиями

$$\left. \begin{aligned} A(x, 0) &= \varphi(x), \\ A(0, t) &= \mu_1(t), \\ A(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \quad (4.40)$$

Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу.

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$A(0, t) = 0, \quad A(l, t) = 0 \quad (4.41)$$

и представимое в виде

$$A(x, t) = X(x)T(t), \quad (4.42)$$

где $X(x)$ — функция только переменного x ; $T(t)$ — функция только переменного t .

Подставляя предполагаемую форму решения (4.42) в уравнение (4.40) и производя деление обеих частей равенства на $a^2 XT$, получим:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad (4.43)$$

где $\lambda = \text{const}$, так как левая часть равенства зависит только от t , а правая — только от x . Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ T' + a^2 \lambda T &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Граничные условия (4.41) дают:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (4.45)$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма–Лиувилля) [11]:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (4.46)$$

исследованную при решении уравнения колебаний в главе 3 (см. раздел 3.6). При этом было показано, что только для значений параметра λ , равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.47)$$

существуют нетривиальные решения уравнения (4.44), равные

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)x. \quad (4.48)$$

Этим значениям λ_n соответствуют решения второго из уравнений (4.44)

$$T_n(t) = C_n \exp(-a^2 \lambda_n t), \quad (4.49)$$

где C_n — не определенные пока коэффициенты.

Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что функции

$$A_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n \exp(-a^2 \lambda_n t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)x \quad (4.50)$$

являются частными решениями уравнения (4.40), удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Обратимся теперь к решению задачи (4.37). Составим формально ряд

$$A(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right] \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)x. \quad (4.51)$$

Функция $A(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$B(x) = A(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)x, \quad (4.52)$$

то есть C_n являются коэффициентами Фурье функции $B(x)$ при разложении ее в ряд по синусам на интервале $(0, l)$:

$$C_n = B_n = \frac{2}{l} \int_0^l B(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)\xi \cdot d\xi. \quad (4.53)$$

Рассмотрим теперь ряд (4.51) с коэффициентами C_n , определяемыми по формуле (4.53), и покажем, что этот ряд удовлетворяет всем условиям задачи (4.37). Для этого надо доказать, что функция $A(x, t)$, определяемая рядом (4.51), дифференцируема, удовлетворяет уравнению в области $0 < x < l$, $t > 0$ и непрерывна в точках границы этой области (при $t = 0$, $x = 0$, $x = l$).

Так как уравнение (4.40) линейно, то в силу принципа суперпозиции ряд, составленный из частных решений, также будет решением, если он сходится и его можно дифференцировать почленно дважды по x и один раз по t .

Примеры другого типа граничных условий рассмотрены ниже в разделе 6.4.1.

4.6. Примеры решения задач, сводящихся к параболическим

4.6.1. Теплопроводность в ограниченном стержне

Рассмотрим однородный цилиндрический стержень длиной l , один конец $x=0$ которого поддерживается при температуре $u_0 = \zeta(t)$, а другой, $x=l$, охлаждается по закону Ньютона. Температуру внешней среды положим равной нулю. Температура $u(x, t)$ в сечении x стержня в момент времени t удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u = 0, \quad (4.54)$$

где $a^2 = k / \text{ср}$, $b^2 = h\rho / (\text{ср}q)$. Предположим, что начальная температура в стержне равнялась $\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — заданная функция от x . Тогда имеем начальное условие $u|_{t=0} = \varphi(x)$ и краевые условия

$$u|_{x=0} = \zeta(t); \quad k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -hu|_{x=l}. \quad (4.55)$$

Соответствующее уравнение собственных значений будет иметь вид

$$v'' - \frac{b^2}{a^2} v + \lambda v = 0 \quad (4.56)$$

и краевые условия

$$v|_{x=0} = 0; \quad \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma v \right] \Big|_{x=l} = 0, \quad (4.57)$$

где $\gamma = h/k$.

Собственные функции задачи будут $v_n = \sin \mu_n x$, где μ_n определяется из уравнения $\text{tg } l\mu = -\mu/\gamma$. Будем искать решение поставленной задачи в виде ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \mu_n x. \quad (4.58)$$

Умножим уравнение (4.56) на $\sin \mu_n x$ и проинтегрируем от 0 до l . Тогда для определения w_n получаем дифференциальное уравнение

$$w'_n + (b^2 + a^2 \mu_n^2) w_n = \frac{\mu_n a^2}{N_n^2} \zeta(t) \quad (4.59)$$

и начальное условие

$$w_n(0) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^l \varphi(x) \sin \mu_n x dx = b_n. \quad (4.60)$$

Для конкретности предположим, что $\zeta(t) = U_0 \rightarrow \text{const}$, а $\varphi(x) = 0$. Тогда $b_n = 0$ и

$$w_n = U_0 \frac{a^2 \mu_n}{N_n^2 (a^2 \mu_n^2 + b^2)} \left[1 - \exp \left(- (b^2 + a^2 \mu_n^2) t \right) \right]. \quad (4.61)$$

Решение поставленной задачи получаем в виде

$$U = U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2 \mu_n}{N_n^2 (a^2 \mu_n^2 + b^2)} \left[1 - \exp \left(- (b^2 + a^2 \mu_n^2) t \right) \right] \sin \mu_n x. \quad (4.62)$$

Контрольные вопросы к главе 4

- 4.1. Какие дифференциальные уравнения в частных производных называются уравнениями параболического типа?
- 4.2. Какие простейшие физические задачи можно описать уравнениями параболического типа?
- 4.3. Какие граничные условия используются при постановке краевых задач, описываемых параболическими уравнениями?
- 4.4. Какие начальные условия используются при постановке краевых задач, описываемых параболическими уравнениями?
- 4.5. В чем заключается принцип максимального значения?
- 4.6. Каким образом доказывается единственность решения краевой задачи с параболическими уравнениями?
- 4.7. Какие методы используются при решении краевых задач с параболическими уравнениями?
- 4.8. Приведите пример решения краевой задачи методом разделения переменных. Что такое расхождение поля и как оно определяется?

Библиографический список к главе 4

- 4.1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: ИИЛ. Т. 1, 1958. — 930 с.
- 4.2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 768 с.
- 4.3. Ерофеев В. Т. Теоремы сложения. — Минск: Наука и техника, 1989. — 256 с.
- 4.4. Карпук А. А. Дифракция поля излучения горизонтального диполя на круговом отверстии в плоском экране в присутствии соосного ему кругового диска // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 10. С. 1804–1815.
- 4.5. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. — Киев: Наук. думка, 1983. — 251 с.
- 4.6. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. — Минск: Наука и техника, 1968. — 583 с.

- 4.7. *Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. — Минск: Университетское, 1988. — 246 с.
- 4.8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1971. — 576 с.
- 4.9. Справочник по специальным функциям/под ред. М. Абрамовича, И. Стиган; пер. с англ. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1979. — 830 с.
- 4.10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М., 1974. — 295 с.
- 4.11. *Ватсон Г. Н.* Теория Бесселевых функций. — М., 1949. Т. 1. — 798 с.
- 4.12. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и сфероидальных функций. — М.: ИЛ, 1952. — 455 с.
- 4.13. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. — М.: Гостехтеоретиздат, 1953. — 380 с.

Глава 5

Дифференциальные уравнения эллиптического типа

5.1. Общий вид уравнений эллиптического типа

В общем виде эллиптическое уравнение может быть представлено следующим образом:

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} + \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \frac{\partial u}{\partial q_\alpha} + cu = f, \quad (5.1)$$

где $a_{\alpha\beta}, b_\alpha, c, f$ — функции, заданные в области V , при условии, что квадратичная форма

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}$$

сохраняет в этой области знак и не обращается в нуль. Число n является числом измерений области V .

Ниже будем предполагать, что функции $a_{\alpha\beta}, b_\alpha, c, f$ непрерывны и, кроме того, что функции $a_{\alpha\beta}$, а также функции

$$e_\alpha \equiv b_\alpha - \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\beta}$$

имеют непрерывные первые производные. При последнем условии уравнение (5.1) можно преобразовать к виду

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial}{\partial q_\alpha} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial q_\beta} + \sum_{\alpha=1}^n e_\alpha \frac{\partial u}{\partial q_\alpha} + cu = f. \quad (5.2)$$

Дифференциальное выражение, стоящее в левой части уравнения (5.1) или (5.2), в опубликованной математической литературе часто обозначают через Lu (L — дифференциальный оператор) — см., например, [5.1]. С учетом дифференциального оператора уравнения (5.1) и (5.2) могут быть записаны в виде

$$Lu = f. \quad (5.3)$$

5.2. Основные граничные задачи

В главе 3 были рассмотрены физические величины, удовлетворявшие уравнениям гиперболического типа. Все эти величины характеризовали процессы, зависящие от времени. В связи с этим для рассматривавшихся уравнений была характерна задача, в которой искомая величина должна удовлетворять кроме уравнения еще граничным и начальным условиям. Мы, далее, видели, что тогда, когда процесс, описываемый в общем случае уравнением гиперболического типа, носит установившийся характер, то, вследствие обращения в нуль членов, содержащих производные по времени, он описывается уравнением эллиптического типа.

Это позволяет предполагать, что уравнения эллиптического типа естественно связаны с физическими задачами, в которых рассматриваются установившиеся (стационарные) процессы. В свою очередь, установившиеся процессы физических объектов естественно считать зависящими только от условий на их границах, но не от последовательности предшествовавших процессов. Решения уравнений, описывающих такие процессы, должны полностью определяться заданием одних граничных условий.

В задачах, описываемых уравнениями гиперболического типа, приходилось задавать на границе изучаемой области одно соотношение, в которое могли входить искомая функция, ее первые производные и некоторые заданные функции, а в начальный момент времени — два соотношения для искомой функции и ее первой производной по времени. В задачах, описываемых уравнениями эллиптического типа в частных производных 2-го порядка, достаточно ограничиться заданием лишь одного соотношения, относящегося к границе изучаемой области — граничного условия, в которое могут входить заданные функции, искомая функция и ее первые производные. Это предположение оправдывается при естественных дополнительных требованиях, относящихся к гладкости искомой функции и ее поведению в бесконечности (последнее, если решение ищется в бесконечной области). Эти требования для внутренних задач могут быть сведены к регулярности решения.

Если ограничиться рассмотрением только внутренних задач, то в наиболее общей форме граничная задача для уравнения эллиптического типа может быть сформулирована следующим образом: найти функции

- а) являющиеся регулярными решениями уравнения (5.3) в рассматриваемой области V ,
- б) на границе $\mathfrak{Z}V$ области V , удовлетворяющие граничному условию

$$\alpha \frac{du}{dl} + \beta u = \varphi, \text{ когда } x \in \mathfrak{Z}V, \quad (5.4)$$

где α, β, φ — заданные на $\mathfrak{Z}V$ функции, причем $|\alpha| + |\beta| > 0$, а $\frac{d}{dl}$ означает дифференцирование по направлению l , заданному в каждой точке на $\mathfrak{Z}V$, в которой $\alpha \neq 0$.

В такой общей постановке граничная задача до сих пор полностью не изучена. Для математической физики наиболее важны частные граничные задачи. Их классификацию применительно к уравнению эллиптического типа общего вида целесообразно определить в зависимости от вида граничного условия следующим образом:

1. Задача Дирихле, или первая граничная задача.

$$Lu = f, \text{ когда } x \in V - \mathfrak{S}V; u = \phi, \text{ когда } x \in \mathfrak{S}V. \quad (5.5)$$

2. Задача Неймана, или вторая граничная задача:

$$Lu = f, \text{ когда } x \in V - \mathfrak{S}V; \alpha \frac{du}{dv} + \beta u = \phi, \text{ когда } x \in \mathfrak{S}V, \quad (5.6)$$

где коэффициент α не обращается в нуль на поверхности $\mathfrak{S}V$, а $\frac{d}{dv}$ означает дифференцирование по направлению конормали к $\mathfrak{S}V$.

3. Смешанная, или третья граничная задача:

$$Lu = f, \text{ когда } x \in V - \mathfrak{S}V; \alpha \frac{du}{dv} + \beta u = \phi, \text{ когда } x \in \mathfrak{S}V, \quad (5.7)$$

где коэффициент α , не обращаясь на поверхности $\mathfrak{S}V$ в нуль тождественно, равен нулю на части $\mathfrak{S}V$.

Отметим, что при нашем новом определении граничных задач задача Неймана охватывает как задачу Неймана, так и, частично, смешанную граничную задачу.

Перечисленные граничные задачи называют внутренними или внешними в зависимости от того, ставятся ли они для области, лежащей внутри или вне конечной, замкнутой поверхности $\mathfrak{S}V$.

Указанную выше постановку и классификацию граничных задач распространяют также на случай двух переменных.

При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является однородное ($f = 0$) или неоднородное уравнение Лапласа ($L \equiv \Delta$):

$$\Delta u = f. \quad (5.8)$$

Функция u называется *гармонической* в области T , если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

При исследовании квазистационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) в ряде случаев приходят к однородным или неоднородным уравнениям Гельмгольца ($L \equiv \Delta + k^2$):

$$\Delta u + k^2 u = f. \quad (5.9)$$

5.3. Простейшие задачи, моделируемые уравнениями Лапласа

5.3.1. Уравнение Лапласа

Уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0, \quad (5.10)$$

где x, y, z — прямоугольные координаты, называют уравнением Лапласа. Выражение, стоящее в левой части уравнения (5.10), называют лапласианом функции A , а правило, по которому образуется выражение, — оператором Лапласа. Оператор Лапласа принято обозначать символом Δ или ∇^2 , тогда (5.10) переписывается в виде

$$\Delta A = 0.$$

Неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = f, \quad (5.11)$$

или

$$\Delta A = f,$$

где f — заданная функция, называют уравнением Пуассона.

Вид дифференциальных операторов в левых частях уравнений Лапласа и Пуассона зависит от используемой ортогональной криволинейной системы координат (см. приложение 1). В частности, для круговой цилиндрической системы координат r, φ, z

$$\Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (5.12)$$

для сферических — r, θ, φ

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (5.13)$$

К уравнениям Лапласа и Пуассона приводят многочисленные задачи теории теплопроводности, гидромеханики и электротехники. Рассмотрим постановку некоторых физических задач для уравнения Лапласа.

5.3.2. Стационарное тепловое поле

Допустим, что мы имеем некоторое изолированное от внешнего пространства однородное изотропное тело, тепловое состояние которого не меняется с течением времени. Обозначим через V занятую им часть пространства, через S —

его поверхность, а через $A(M)$ — температуру в точке $M \in V$. Требуется доказать, что во всякой внутренней точке M взятого тела функция $A(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

С этой целью выделим из тела некоторую область V_1 , ограниченную произвольно взятой поверхностью S_1 , и рассмотрим количество тепла dQ , которое проходит в единицу времени через элемент ds_1 поверхности. Согласно принципу Фурье, оно пропорционально площади элемента и нормальной производной (dA/dn) , где через n обозначено направление внешней нормали к поверхности. Таким образом

$$dQ = k \frac{dA}{dn} ds_1.$$

Коэффициент пропорциональности k называется *коэффициентом внутренней теплопроводности тела*.

Рассмотрим движение тепла в теле. Из термодинамики известно, что тепло течет от точек с большей температурой к точкам с меньшей температурой. Следовательно, при отрицательной производной (dA/dn) поток тепла будет происходить из внутренней части тела, ограниченной поверхностью S_1 , в область, внешнюю по отношению к этой поверхности. Если же указанная производная положительна, то распространение тепла будет происходить в обратную сторону. Отсюда вытекает, что поверхностный интеграл 1-го рода

$$k \iint_{S_1} \frac{dA}{dn} ds_1 \quad (5.14)$$

дает алгебраическую сумму количества тепла, прошедшего за единицу времени через поверхность S_1 , причем вытекающему теплу приписывается отрицательный знак, а втекающему — положительный.

Если предположить, что внутри тела отсутствуют как источники тепла, так и точки его поглощения, то интеграл (5.14) должен равняться нулю. Действительно, если бы это было не так, то тепло накапливалось бы или терялось внутри тела, и, следовательно, температура тела изменилась бы с течением времени, что противоречит предположению о неизменности теплового состояния тела.

Итак, в данном случае должно иметь место следующее равенство:

$$k \iint_{S_1} \frac{dA}{dn} ds_1 = 0. \quad (5.15)$$

Применим в области V_1 формулу Грина (1.19), глава 1:

$$\oint [U \operatorname{grad} V - V \operatorname{grad} U] \cdot d\vec{A} = \iiint [U \nabla^2 V - V \nabla^2 U] dv, \\ \iiint_{V_1} [U \Delta V - V \Delta U] dv = \iint_{S_1} \left[U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right] ds_1$$

и положим в ней $V = 1$.

Тогда, приняв во внимание, что интеграл (5.14) равен нулю, найдем, что

$$\iiint_{V_1} \Delta U dv_1 = 0.$$

Отсюда, ввиду произвольности области V_1 , вытекает, что

$$\Delta U = 0,$$

то есть функция $U(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Предположим теперь, что нам известно распределение температуры на поверхности S тела и необходимо определить температуру любой точки, находящейся внутри тела. Очевидно, эту задачу можно решить, если будет найдено такое решение уравнения Лапласа, которое удовлетворяло бы граничному условию

$$U = f(M), \text{ когда } M \in S, \quad (5.16)$$

где $f(M)$ обозначает температуру в точке M поверхности S .

5.3.3. Потенциальное течение несжимаемой жидкости

Исследуем движение несжимаемой жидкости. Обозначим через $\vec{v}$ вектор скорости жидкости, и пусть v_x, v_y, v_z — его проекции на неподвижные оси прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$. В дальнейшем исследовании предположим, что эти проекции не зависят явным образом от времени t . Такое движение жидкости будем называть *установившимся* (потенциальным).

Допустим, что движение жидкости происходит с потенциалом скоростей u , другими словами, будем считать, что имеют место равенства:

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (5.17)$$

Докажем, что этот потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (5.18)$$

В самом деле, известно [5.4], что проекции v_x, v_y, v_z вектора $\vec{v}$ и плотность ρ жидкости связаны между собой уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0. \quad (5.19)$$

Принимая во внимание, что для несжимаемой жидкости плотность ρ постоянна, можно переписать уравнение (5.19) в виде

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0. \quad (5.20)$$

Подставив в (5.20) вместо v_x, v_y, v_z их выражения по формулам (5.17), придем к уравнению Лапласа (5.18).

Что касается граничных условий, то они будут зависеть от существования рассматриваемой гидродинамической задачи. Например, на твердых стенках бассейна будем иметь

$$\frac{du}{dn} = 0,$$

где n — нормаль к стенке. Если твердое тело движется в жидкости заданным образом, то на поверхности тела

$$\frac{du}{dn} = f(M), \quad (5.21)$$

где $f(M)$ — заданная функция.

Более сложные граничные условия получаются для свободной поверхности жидкости. Кроме того, надо принять во внимание условия, которым должен удовлетворять потенциал в бесконечности. Во многих гидродинамических задачах предполагают, что вызывающее движение жидкости возмущение, если оно действует в ограниченной области пространства, не изменяет состояния покоя жидкости на бесконечном удалении этой области. При этом в бесконечности будут обращаться в нуль частные производные $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$, $\partial u / \partial z$, причем можно доказать, что величины

$$|ru|, \left| r^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \left| r^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \left| r^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right|$$

будут ограниченными при беспредельно возрастающем r .

Предположение, что жидкость покоится в бесконечности, делается, например, в важнейшей гидродинамической задаче о движении твердого тела в несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство.

5.3.4. Потенциал стационарного и электростатического поля

Пусть в однородной проводящей среде имеется стационарный ток с плотностью $\vec{\delta}(x, y, z)$. Если в среде нет объемных источников тока, то

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0. \quad (5.22)$$

Напряженность $\vec{E}$ электрического поля определяется из закона Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{E} = \frac{\vec{\delta}}{\gamma}, \quad (5.23)$$

где γ — электрическая проводимость среды.

В связи с тем, что процесс стационарный, то электрическое поле является безвихревым или потенциальным, т. е. $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$. А значит существует такая скалярная функция $\varphi(x, y, z)$, для которой

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (5.24)$$

а тогда $\vec{\delta} = -\gamma \operatorname{grad} \varphi$.

На основании выражений (5.22) и (5.24) заключаем, что

$$\Delta \varphi = 0, \quad (5.25)$$

то есть потенциал ЭП стационарного тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

Рассмотрим ЭП стационарных зарядов. Из стационарности процесса следует, что

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0,$$

то есть поле является потенциальным.

Пусть $\rho(x, y, z)$ — объемная плотность зарядов, имеющих в среде, характеризующейся диэлектрической постоянной ϵ . Исходя из закона Гаусса:

$$\iint_S E_n ds = \iiint_V \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) dv, \quad (5.26)$$

где V — некоторый произвольный объем, S — поверхность, его ограничивающая, и пользуясь теоремой Остроградского–Гаусса

$$\iint_S E_n ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dv, \quad (5.27)$$

получаем

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Подставляя сюда выражение (5.24) для $\vec{E}$, будем иметь:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (5.28)$$

то есть электростатический потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона. Если объемных зарядов нет ($\rho=0$), то потенциал φ должен удовлетворять уравнению Лапласа.

5.3.5. Потенциал магнитостатического поля

Магнитостатическое поле образуется системой постоянных магнитов или намагниченных тел. Если рассматривать области, не содержащие тока ($\vec{j}=0$), то систему уравнений магнитостатики можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (5.29)$$

где $\vec{B}, \vec{H}$ — векторы индукции и напряженности МСП; μ — магнитная проницаемость среды.

Первое из уравнений (5.29) позволяет ввести

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_M, \quad (5.30)$$

где φ_M — магнитостатический потенциал.

Из (5.30) следует, что в однородной среде ($\mu = \text{const}$) магнитостатический потенциал подчиняется уравнению Лапласа:

$$\Delta \Phi_M = 0. \quad (5.31)$$

5.4. Решение задач, описываемых уравнениями Лапласа

5.4.1. Методы решений уравнения Лапласа

Существует большое число методов, с помощью которых могут быть разрешены краевые задачи, описываемые с помощью уравнения Лапласа. Из наиболее используемых, с целью получения эффективных решений, можно рекомендовать методы: теории потенциала; разложения по собственным функциям; разделения переменных; интегральных преобразований и конформного отображения.

Рассмотрим кратко упомянутые здесь методы.

Методы теории потенциала. Теория потенциала используется при решении уравнения Лапласа. Решение этого уравнения представляется в виде интеграла от произведения плотности потенциала и фундаментального решения уравнения Лапласа. В трехмерном случае фундаментальным решением уравнения Лапласа является функция $1/r$, а в двумерном — $\ln(1/r)$, где r — расстояние между точками. Если искать решение краевой задачи в виде потенциала, то для его плотности возникает интегральное уравнение Фредгольма, а интегрирование ведется по границе рассматриваемой области.

Методы разложения по собственным функциям. Метод отыскания решений в виде рядов по некоторым функциям часто применяется при решении уравнения Лапласа. Задача приводится к задачам на собственные значения, которые представляют собой однородные уравнения с параметром. Значения параметров, при которых уравнение имеет ненулевые решения, называются *собственными значениями*, а соответствующие решения *собственными функциями*.

Методы разделения переменных широко используются при решении уравнения Лапласа. Так же как и методы разложения по собственным функциям, данные методы предназначены для отыскания частных решений дифференциальных уравнений. Методы разделения переменных часто приводят к специальным функциям (Лежандра, Бесселя, Ганкеля, Матье и др.), которые являются решениями задач на собственные значения.

Методы интегральных преобразований — эффективные методы решения и исследования уравнений Лапласа. Они заключаются в интегрировании уравнения с некоторой весовой функцией, зависящей от двух аргументов. Это часто приводит к упрощению исходной задачи. Основным условием для применения интегральных преобразований является наличие теоремы обращения, позво-

ляющей найти исходную функцию, зная ее образ. В зависимости от весовой функции и области интегрирования используются преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, Ганкеля, Мейера, Гильберта и др.

Методы конформного преобразования. Конформное отображение относится к одному из основных понятий теории функций комплексного переменного и играет важную роль при решении задач аэро- и гидромеханики, теории упругости, электро- и радиотехники, теории фильтрации и др. К сожалению, использование этого метода ограничивается двумерными задачами.

Подробнее о методах решения прикладных задач математической физики можно познакомиться с помощью математической литературы (см., например, [5.17]).

Выбор метода решения уравнений Лапласа во многом определяется формой области задания физической задачи. Если область близка к аналитической, то наиболее простые результаты получаются при использовании методов разложения по собственным функциям, разделения переменных (метод Фурье); теории потенциала. Если область задания физической задачи далека от аналитической, то решение с большей эффективностью может быть получено с помощью методов интегральных преобразований и конформных отображений.

Наиболее распространенным методом решения уравнений Лапласа в аналитических областях можно считать метод разделения переменных, о котором мы будем говорить в разделе 5.4.2.

5.4.2. Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных

Построим решения уравнения Лапласа с разделенными переменными в конкретных системах координат. Для простейших криволинейных координат процесс разделения легко осуществляется [5.3].

Прямоугольные координаты (x, y, z) . Для уравнения Лапласа в прямоугольных координатах

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5.32)$$

решения с разделенными переменными будем искать в виде

$$u = A(x)B(y)C(z), \quad (5.33)$$

где $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$ — составляющие решения, зависящие только от одной координаты.

В дальнейшем из решений (5.33) будем использовать решения [5.6]:

$$U^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \beta) = \exp(\pm az + i\lambda x + i\beta y), \quad (5.34)$$

где $a = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2}$; λ, β — произвольные комплексные постоянные разделения.

Круговые цилиндрические координаты (ρ, z, φ) определяются формулами (рис. 5.1) $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$, где $0 \leq \rho < \infty$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; $-\infty < z < \infty$.

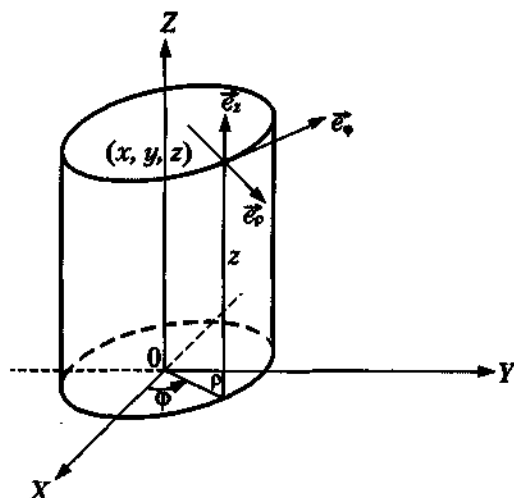


Рис. 5.1. Круговой цилиндр

Запишем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (5.35)$$

Из решений с разделенными переменными

$$u = A(\rho)B(z)C(\varphi) \quad (5.36)$$

выделим решения уравнения Лапласа в координатах вида:

$$U_m^{(2)}(\rho, z, \varphi; \lambda) = I_m(\lambda \rho) \exp(i\lambda z + im\varphi); \quad (5.37)$$

$$\tilde{U}_m^{(2)}(\rho, z, \varphi; \lambda) = \tilde{K}_m(\lambda \rho) \exp(i\lambda z + im\varphi); \quad (5.38)$$

$$V_m^{(\mp 2)}(\rho, z, \varphi; \lambda) = J_m(\lambda \rho) \exp(\mp i\lambda z + im\varphi), \quad (5.39)$$

$$m = 0, \pm 1, \dots; -\infty < \lambda < \infty.$$

Сферические координаты (r, θ, φ) . Сферические координаты определяются формулами (рис. 5.2) $x = r \cos \varphi \sin \theta$; $y = r \sin \varphi \sin \theta$; $z = r \cos \theta$, где $0 \leq r < \infty$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; $0 \leq \theta \leq \pi$.

Уравнение Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5.40)$$

Из решений с разделенными переменными

$$u = A(r)B(\theta)C(\varphi) \quad (5.41)$$

уравнения (5.38) выделим гармонические функции вида

$$U_{mn}^{(3)}(r, \theta, \varphi) = r^n P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi); \quad (5.42)$$

$$\bar{U}_{mn}^{(3)}(r, \theta, \varphi) = r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (5.43)$$

$$n = 0, 1, \dots; m = 0, \pm 1, \dots, \pm n.$$

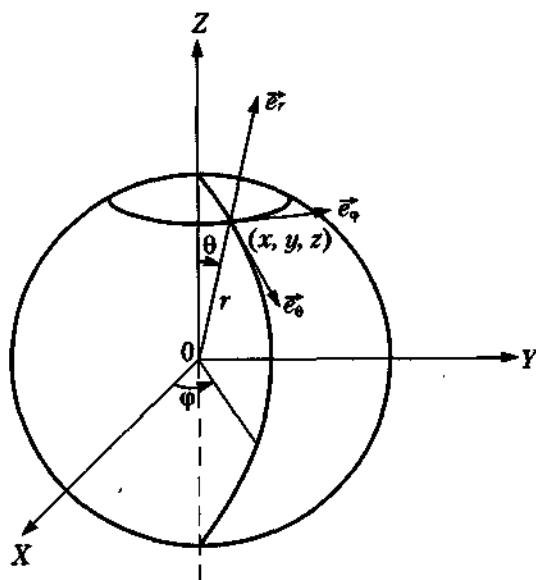


Рис. 5.2. Сфера

Координаты вытянутого сфероида (ξ, η, φ) . Координаты вытянутого сфероида определяются формулами (рис. 5.3):

$$\begin{aligned} x &= c[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \varphi; \\ y &= c[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \varphi; \\ z &= c\xi\eta, \end{aligned} \quad (5.44)$$

где $1 \leq \xi < \infty$; $-1 \leq \eta \leq 1$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; c — положительный параметр. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta u \equiv \frac{1}{c^2(\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Из решений с разделенными переменными

$$u = A(\xi)B(\eta)C(\varphi) \quad (5.46)$$

выделим сфероидальные гармонические функции вида

$$U_{mm}^{(4)}(\xi, \eta, \varphi; c) = P_n^m(\xi) P_n^m(\eta) \exp(im\varphi); \quad (5.47)$$

$$\tilde{U}_{mm}^{(4)}(\xi, \eta, \varphi; c) = Q_n^m(\xi) P_n^m(\eta) \exp(im\varphi), \quad (5.48)$$

где $n = 0, 1, \dots$; $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$.

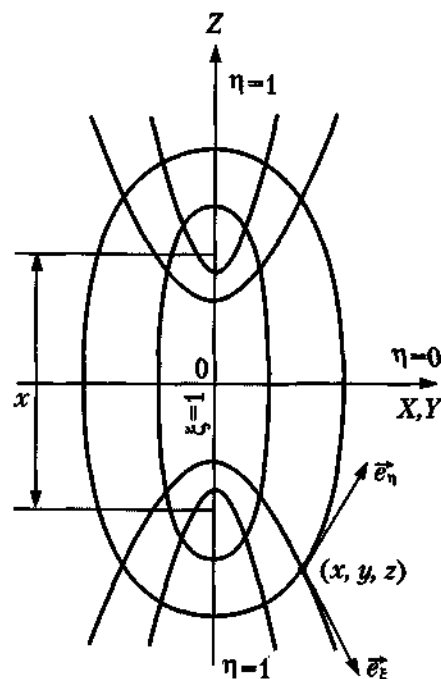


Рис. 5.3. Поперечное сечение вытянутого сфероида

Координаты сплюснутого сфероида (ξ, η, φ) . Координаты сплюснутого сфероида определяются формулами (рис. 5.4):

$$\begin{aligned} x &= c \left[(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2) \right]^{1/2} \cos \varphi; \\ y &= c \left[(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2) \right]^{1/2} \sin \varphi; \\ z &= c\xi\eta, \end{aligned} \quad (5.49)$$

где $0 \leq \xi < \infty$; $-1 \leq \eta \leq 1$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; c — положительный параметр.

Уравнение Лапласа в сплюснутых сфероидальных координатах имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta u \equiv & \frac{1}{c^2 (\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2 (\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Из решений с разделенными переменными в сплюснутых сфероидальных координатах выделим гармонические функции вида

$$U_{nm}^{(5)}(\xi, \eta, \varphi; c) = P_n^m(i\xi)P_n^m(\eta) \exp(im\varphi); \quad (5.51)$$

$$\bar{U}_{nm}^{(5)}(\xi, \eta, \varphi; c) = Q_n^m(i\xi)P_n^m(\eta) \exp(im\varphi), \quad (5.52)$$

где $n = 0, 1, \dots$; $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$; где $n = 0, 1, \dots$; $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$.

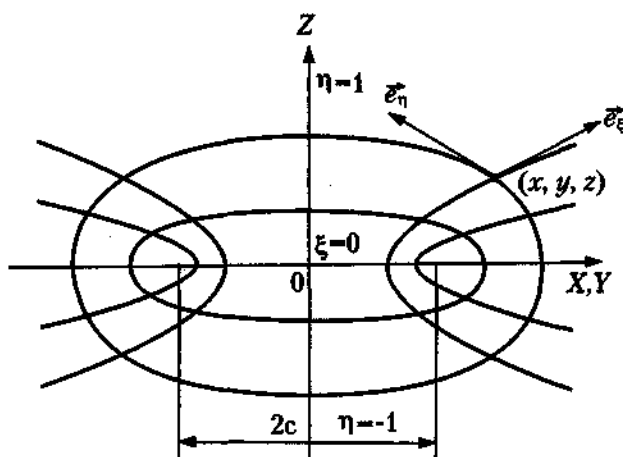


Рис. 5.4. Поперечное сечение сплюснутого сфероида

5.4.3. Единственность решения граничных задач, описываемых уравнениями Лапласа

Докажем единственность решения задачи Дирихле для уравнений Пуассона. Предположим, что задача Дирихле

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{когда } x \in V - \partial V, \\ u &= \phi, \quad \text{когда } x \in \partial V \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

имеет два различных решения u_1 и u_2 . Тогда разность $w = u_1 - u_2$ гармонична в области V и обращается в нуль на ее границе ∂V .

Если область V ограничена, можно непосредственно применить теорему о максимуме и минимуме. Внутри области V гармоническая функция w не может иметь значений ни больших, ни меньших своего граничного значения, равного нулю. Поэтому она равна нулю и всюду внутри области, т. е. функции u_1 и внутри рассматриваемой области совпадают. Если область V бесконечна, воспользуемся теоремой Кельвина, построив функцию $w^*(\xi) = |x|w(x)$, где ξ — точка с координатами $\xi_i \equiv x_i / |x|$. Функция $w^*(\xi)$ гармонична в ограниченной области V' , сопряженной области V , и обращается на ее границе в нуль в силу граничного условия для функции w . Следовательно, по доказанному, она равна нулю, а поэтому равна нулю и функция $w(x) = |\xi|w^*(\xi)$. Это завершает

доказательство. Так же просто доказывается непрерывная зависимость решения рассматриваемой задачи Дирихле от граничного условия. Пусть u_1 и u_2 — решения двух задач Дирихле для одной и той же области, граничные значения которых различаются не более чем на величину ε . При этом функция $w = u_1 - u_2$ гармоничная, а в точках границы области отличается от нуля не более, чем на ε .

Если область V ограничена, то в силу теоремы о максимуме и минимуме функция $u_1 - u_2$ не может отличаться от нуля больше чем на ε и в любой точке внутри области. Следовательно, во всей области $|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$, из чего и вытекает требуемое утверждение. Если область V бесконечна, но точка $|x| = 0$ не принадлежит области, то, применив теорему Кельвина, придем к функции $w^*(\xi) \equiv |x|w(x)$, гармонической в ограниченной области V' , сопряженной области V . Граничные значения функции w^* не превосходят $A\varepsilon$, где A — наибольшее значение величины $|x|$ на границе ∂V . Следовательно, по доказанному, $w^*(\xi) < A\varepsilon$, когда $\xi \in V'$. Отсюда $w(x) < (A/B)\varepsilon$, где B — наименьшее значение величины $|x|$ на границе ∂V , и наше утверждение доказано. Когда точка $|x| = 0$ принадлежит области V , то до применения теоремы Кельвина можно сместить начало координат, после чего с помощью теоремы Кельвина снова придем к требуемому результату.

Чтобы рассмотреть задачу Неймана и смешанную задачу, обратимся к формуле Грина (1.19), глава 1. Приняв во внимание тождество:

$$v \left(\frac{du}{dn} + \beta u \right) - u \left(\frac{dv}{dn} + \beta v \right) \equiv v \frac{du}{dn} - u \frac{dv}{dn}, \quad (5.54)$$

где β — произвольная непрерывная функция, и введя для сокращения письма обозначение:

$$P \equiv \frac{d}{dn} + \beta, \quad (5.55)$$

приведем формулу Грина к виду:

$$\iint_{\partial V} (v P u - u P v) dS = \iiint_V (v \Delta u - u \Delta v) dV, \quad (5.56)$$

где V — ограниченная область. Положив в этой формуле одну из входящих в нее функций равной 1, а вторую — равной квадрату гармонической функции w , придем к формуле Дирихле:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_3} \right)^2 \right] dV = \\ = \iint_{\partial V} w P w dS - 0,5 \iint_{\partial V} \beta w^2 dS. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Воспользуемся равенством (5.57), чтобы установить условия единственности решений внутренней смешанной задачи и внутренней задачи Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона.

При обозначении (5.57) обе эти задачи могут быть записаны в единой форме:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= f, & \text{когда } x \in V - \mathfrak{Z}V, \\ Pu &= \phi, & \text{когда } x \in \mathfrak{Z}V. \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

При $\beta \neq 0$ эта запись соответствует смешанной задаче, а при $\beta \equiv 0$ — задаче Неймана.

Предположим, что задача (5.58) имеет два различных решения u_1 и u_2 , непрерывных в области V вместе со своими первыми производными. Тогда их разность $w = u_1 - u_2$ явится решением однородной граничной задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta w = 0, \text{ когда } x \in V - \mathfrak{Z}V; \quad Pw = 0, \text{ когда } x \in \mathfrak{Z}V,$$

удовлетворяющим тем же условиям непрерывности. При этом, для $\beta \geq 0$, из формулы Дирихле следует, что

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_3} \right)^2 \right] dV \leq 0.$$

Так как все члены подынтегрального выражения неотрицательны, а само это выражение, по предположению, непрерывно, то должно быть $(\partial w / \partial x_i) = 0$ ($i = 1, 2, 3$), то есть

$$w = u_1 - u_2 \rightarrow \text{const}.$$

Чтобы определить допускаемые значения постоянной в правой части этого равенства, обратимся к граничному условию рассматриваемой однородной задачи.

Если $\beta \equiv 0$ (задача Неймана), то ему удовлетворяет любая постоянная. Следовательно, любая постоянная является решением однородной задачи Неймана, а поэтому решение неоднородной задачи Неймана определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Если же $\beta \neq 0$ хотя бы на части границы $\mathfrak{Z}V$, то эта постоянная равна нулю, т. е. решение смешанной задачи единственно.

К задаче Неймана обычно приводят физические проблемы, для которых появление постоянного слагаемого в решении либо несущественно (если выбор начала отсчета значений функции u может быть произвольным), либо это постоянное слагаемое определяется из дополнительных требований к поведению функции и на границе. Например, часто представляет интерес решение, среднее значение которого на границе области равно нулю. Это приводит к условию:

$$\iint_{\mathfrak{Z}V} u dS = 0. \quad (5.59)$$

Такое решение, очевидно, единственно.

Таким образом, дополнительные условия, делающие задачу Неймана поставленной корректно, могут устанавливаться в зависимости от конкретного содержания изучаемой физической проблемы.

Перейдем к внешним задачам.

Пусть V — бесконечная область с конечной границей $\mathfrak{S}V$. Выделим из области V конечную часть V^* , лежащую внутри шаровой поверхности Σ , содержащей границу $\mathfrak{S}V$ внутри себя. Применив в области V^* формулу Дирихле (5.57), получим

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_3} \right)^2 \right] dV = \\ & = \iint_{\mathfrak{S}V} w P w dS - 0,5 \iint_{\mathfrak{S}V} \beta w^2 dS + \iint_{\Sigma} \left(w \frac{dw}{dn} + 0,5 \beta w^2 \right) dS. \end{aligned}$$

Будем неограниченно увеличивать радиус поверхности Σ . В силу леммы о поведении гармонической функции в бесконечности, в окрестности бесконечно удаленной точки слагаемые $(\partial w / \partial x_i)^2$ убывают не медленнее, чем $1/r^4$, тогда как с ростом поверхности Σ объем области V^* возрастает лишь как r^3 . Следовательно, интеграл по области V^* при этом сходится к несобственному интегралу по области V . Интеграл $\iint_{\Sigma} w(\partial w / \partial n) dS$ с ростом радиуса поверхно-

сти Σ сходится к нулю, так как, в силу той же леммы, выражение $w(\partial w / \partial n)$ при этом убывает на Σ как $1/r^3$, в то время как площадь поверхности Σ растет лишь как r^2 . Поскольку для нас представляют интерес значения функции β только на границе $\mathfrak{S}V$, выберем β так, чтобы с ростом Σ интеграл

$$\iint_{\Sigma} \beta w^2 dS \text{ обращался в нуль.}$$

Осуществив предельный переход в написанном выше соотношении, придем к формуле Дирихле для бесконечной области:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_3} \right)^2 \right] dV = \\ & = \iint_{\mathfrak{S}V} w P w dS - 0,5 \iint_{\mathfrak{S}V} \beta w^2 dS. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Эта формула полностью совпадает с формулой (5.61). Поэтому по тем же соображениям, как и выше, придем к выводу, что при $\beta \geq 0$ разность $w = u_1 - u_2$ двух решений u_1 и u_2 внешней граничной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{когда } x \in V - \mathfrak{S}V, \\ Pu &\equiv \frac{du}{dn} + \beta u = \phi, \quad \text{когда } x \in \mathfrak{S}V \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

удовлетворяет соотношениям $(\partial w / \partial x_i) = 0$ ($i = 1, 2, 3$), откуда следует, что $w \rightarrow \text{const}$. Постоянная в правой части последнего соотношения должна быть

равна нулю как для внешней смешанной задачи, так и для внешней задачи Неймана, поскольку в бесконечно удаленной точке все гармонические функции имеют совпадающее значение, равное нулю. Таким образом, при $\beta \geq 0$ регулярное решение внешней задачи (5.61) единственно.

Коснемся теперь вопроса об условиях существования решений задачи Неймана для уравнения Лапласа. Положив в формуле Грина (1.19), гл. 1, $v=1$, $\Delta u = 0$, получим

$$\iint_S \frac{du}{dn} dS = 0, \quad (5.62)$$

где S — произвольная поверхность, являющаяся границей конечной области, в которой функция u гармонична. Отсюда следует, что граничное условие

$$\frac{du}{dn} = \phi, \text{ когда } x \in \mathfrak{S}V,$$

внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа не может быть задано произвольно, а должно удовлетворять соотношению:

$$\iint_{\mathfrak{S}V} \phi dS = 0. \quad (5.63)$$

Этот результат допускает простое истолкование. Рассмотрим, например, температурное поле. Согласно принципу Фурье, количество тепла, текущего через элемент поверхности dS , пропорционально произведению $(du/dn)dS$, где du/dn — производная температуры u по направлению нормали к элементу dS . Если температурное поле не меняется с течением времени, то общее количество тепла, проходящего через любую замкнутую поверхность, заключенную в пределах тела, равно нулю. Таким образом, соотношение (5.62) или (5.63) представляет условие стационарности поля.

Заметим, что свойство, выраженное соотношением (5.62), присуще только гармоническим функциям (см. задачу 1).

Условие (5.63) не распространяется, однако, на внешнюю задачу Неймана. Действительно, введем снова область V^* , которую мы рассматривали при выводе формулы Дирихле (5.60). Применяя формулу (5.61) в области V^* , получим

$$\iint_{\mathfrak{S}V} \frac{du}{dn} dS = - \iint_{\Gamma} \frac{du}{dn} dS.$$

Когда радиус поверхности Σ неограниченно растет, интеграл по Σ может не стремиться к нулю, так как из доказательства леммы о поведении гармонической функции на бесконечности вытекает, что подынтегральное выражение может убывать лишь как $1/r^2$, т. е. интеграл по Σ может не обращаться в нуль с ростом поверхности Σ . Следовательно, формула (5.62), а с ней и формула (5.67), не переносится на функции, гармонические в бесконечной области.

Вспомнив толкование формулы (5.61), видим, что в рамках этого толкования взаимодействие между средой в бесконечной области и внешним

пространством следует считать происходящим не только на границе $\mathcal{Z}V$ области, но и в бесконечно удаленной точке, вследствие чего равновесный баланс на границе $\mathcal{Z}V$ может не соблюдаться.

5.5. Простейшие задачи, моделируемые уравнениями Гельмгольца

5.5.1. Задачи, приводящие к уравнению Гельмгольца

К уравнению Гельмгольца

$$\Delta v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + k^2 v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \quad (5.64)$$

где $v(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — скалярная функция, описывающая соответствующее поле в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 ; k — волновое число, сводится широкий класс задач, связанных с установившимися колебаниями (механическими, акустическими, электромагнитными и т. д.) и диффузионными процессами.

Установившиеся колебания. Рассмотрим в качестве примера мембрану S , закрепленную по границе C и колеблющуюся под действием периодических во времени сил. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\Delta \bar{u} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - F_0(x, y) \cos(\omega t). \quad (5.65)$$

При изучении периодических процессов удобно пользоваться комплексными функциями, заменяя (5.65) уравнением

$$\Delta \dot{u} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t^2} - F_0(x, y) \exp(j\omega t). \quad (5.66)$$

Функция $\dot{u}$ является вещественной частью функции u из (5.65). Установившиеся колебания можно искать в виде

$$u = v \exp(j\omega t), \quad (5.67)$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Для амплитуды установившихся колебаний v получаем

$$\Delta v + k^2 v = -F_0(x, y) \quad \left(k = \frac{\omega}{c} \right), \quad (5.68)$$

к которому надо добавить граничное условие

$$v|_C = 0. \quad (5.69)$$

Если контур мембраны C не закреплен, а совершает периодические колебания с той же частотой ω

$$v|_C = f_0 \exp(j\omega t), \quad (5.70')$$

то для функции v на контуре C имеет место неоднородное граничное условие

$$v|_C = f_0. \quad (5.70'')$$

Как было уже отмечено, задачи об установившихся колебаниях характерны также для акустики и теории ЭМП. Кроме того, часто встречаются задачи об установившихся колебаниях в неоднородной среде, в частности в кусочно-однородной среде (когда, например, в пространстве имеются отдельные области, нарушающие однородность). К этому кругу вопросов относятся также и задачи теории дифракции.

Диффузия газа при наличии распада и при цепных реакциях. При диффузии некоторых газов (например, эманации радия) происходит реакция распада молекул диффундирующего газа. Скорость реакции распада обычно принимают пропорциональной концентрации газа. При написании уравнения диффузии это эквивалентно наличию отрицательных источников газа. В случае стационарного процесса диффузии (для однородной среды) приходят к уравнению

$$D \Delta v + cv = 0 \quad (c < 0), \quad (5.71)$$

где D — коэффициент диффузии. Наибольший интерес представляет случай $c > 0$, соответствующий диффузии при наличии цепных реакций, ведущих к размножению диффундирующих частиц. В стационарном случае получаем при этом уравнение

$$\Delta v + cv = 0 \quad (c > 0),$$

так как цепная реакция эквивалентна наличию источников диффундирующего вещества, пропорциональных концентрации $v(x, y, z)$.

Диффузия в движущейся среде. Рассмотрим задачу о диффузии газа в заданном стационарном потоке, скорость которого в точке $M(x, y, z)$ имеет компоненты $\vartheta_1(x, y, z)$, $\vartheta_2(x, y, z)$, $\vartheta_3(x, y, z)$. Количество газа, протекающего через элементарную площадку $d\sigma$ в точке $M(x, y, z)$, равно

$$dQ = -D \vec{n} \operatorname{grad} u d\sigma + u \vec{\vartheta} \vec{n} d\sigma,$$

где $u(x, y, z)$ — концентрация газа в единице объема; $\vec{n}$ — единичный вектор, нормальный к площадке $d\sigma$; D — коэффициент диффузии в точке (x, y, z) ; $\vec{\vartheta}(x, y, z)$ — вектор скорости потока.

Составляя уравнение сохранения вещества для некоторого объема T с границей Σ , получаем:

$$\iint_{\Sigma} [-D \vec{n} \operatorname{grad} u + u \vec{\vartheta} \vec{n}] d\sigma = 0.$$

Преобразуем поверхностный интеграл в объемный, пользуясь формулой Остроградского

$$\iiint_T [\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u \vec{\vartheta})] d\tau = 0.$$

Отсюда вытекает уравнение диффузии в заданном потоке

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u \vec{v}) = 0 \quad (5.72)$$

или в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x} (u v_1) - \frac{\partial}{\partial y} (u v_2) - \frac{\partial}{\partial z} (u v_3) = 0. \end{aligned} \quad (5.73)$$

К такому же уравнению приводит задача о распространении тепла в движущейся среде.

Пример диффузии в движущейся среде. Пусть в полупространстве $z \geq 0$ перемещается воздушный поток с постоянной скоростью u_0 , направленной по оси x . Считая коэффициент диффузии постоянным, получаем из (5.72) уравнение

$$D \Delta u - u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

являющееся простейшим вариантом уравнения газовой атаки.

Полагая

$$u = v \exp(\mu x),$$

где $v(x, y, z)$ — амплитуда скорости движущегося потока газа; μ — некоторое число, и выбирая затем

$$\mu = \frac{u_0}{2D},$$

получим для функции $v(x, y, z)$ уравнение

$$\Delta v + cv = 0,$$

где

$$c = -\frac{u_0^2}{4D} < 0.$$

5.5.2. Связь уравнения Гельмгольца с уравнениями гиперболического и параболического типов

Рассмотрим уравнение

$$\Delta w = a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2a_1 \frac{\partial w}{\partial t} + a_2 w, \quad (5.74)$$

где a_0, a_1, a_2 — постоянные.

При $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$ оно представляет телеграфное уравнение. При $a_1 = a_2 = 0, a_0 > 0$ оно переходит в волновое уравнение (глава 3), при $a_0 = a_2 = 0, a_1 > 0$ — в уравнение теплопроводности и диффузии, при $a_0 = 0, a_1 > 0, a_2 \neq 0$ — в уравнение диффузии для среды, в которой происходят химические или цепные реакции.

Руководствуясь методом разделения переменных, будем искать решения уравнения (1), в виде

$$w(x, t) = u(x)v(t), \quad (5.75)$$

где $u(x)$ — функция только пространственных координат, а $v(t)$ — функция только времени. Подставив выражение (5.75) в уравнение (5.74), получим:

$$\frac{1}{u} \Delta v = \frac{1}{v} \left(a_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2a_1 \frac{\partial v}{\partial t} + a_2 v \right).$$

Так как левая часть этого уравнения не зависит от t , а правая — от координат точки x , то должно быть

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (5.76)$$

$$a_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2a_1 \frac{\partial v}{\partial t} + (a_2 + k^2)v = 0, \quad (5.77)$$

где k^2 — некоторое число.

Уравнение эллиптического типа (5.76) представляет собой уравнение Гельмгольца. Как уже отмечалось, оно играет важную роль в математической физике ввиду большого значения приводящих к нему проблем (волновые процессы, теплопроводность, диффузия и др.).

Из формулы (5.75) следует, что уравнение Гельмгольца непосредственно определяет меняющуюся от точки к точке интенсивность процессов, происходящих во всех точках изучаемой области по одному и тому же временному закону. В частном случае, когда функция v постоянна, оно определяет стационарное состояние. Суперпозицией решений вида (5.75) можно охватить практически любые пространственно-временные зависимости.

Возможность построить любую временную зависимость (удовлетворяющую лишь некоторым общим требованиям) путем суперпозиции решений вида (5.75) сохранится, если вместо произвольных функций $v(t)$ рассматривать только функции, образующие в совокупности полную систему. Поэтому, без ограничения общности, вместо подстановки (5.75) можно рассматривать подстановку, соответствующую гармоническим колебаниям с меняющейся от точки к точке амплитудой и фазой. В этом случае, в силу теоремы Фурье, произвольная пространственно-временная зависимость может быть получена путем наложения колебаний разных частот.

Гармонические колебания удобно описывать с помощью комплексных функций вида

$$u(x) \exp(-j\omega t), \quad (5.78)$$

или

$$u(x) \exp(j\omega t), \quad (5.79)$$

где ω — круговая частота колебаний, а $u(x)$ — комплексная функция координат точки x . Вещественная часть выражений (5.78) и (5.79) определяет в каждой точке x одно и то же гармоническое колебание

$$\operatorname{Re}[u(x) \exp(\mp j\omega t)] = |u(x)| \cos(\omega t + \theta) \quad (5.80)$$

с амплитудой $|u(x)|$ и фазой θ , являющейся корнем уравнений

$$\sin \theta = \frac{\mp \operatorname{Im} u}{u}, \quad \cos \theta = \frac{\operatorname{Re} u}{u}.$$

Символы Re и Im означают, что берется соответственно вещественная или мнимая часть стоящей за ними функции. Знак минус или плюс перед Im и в выражении для $\sin \theta$ выбирается в зависимости от того, используется ли выражение (5.78) или (5.79). Подставив выражение (5.78) в выражение (5.74), после сокращения на множитель $\exp(-j\omega t)$, приходим к уравнению Гельмгольца (5.76) с параметром k^2 , имеющим, в общем случае, комплексное значение:

$$k^2 = \omega^2 a_0 - a_2 + 2a_1 j. \quad (5.81)$$

При подстановке выражения (5.79) приходим к уравнению Гельмгольца, комплексно сопряженному уравнению, полученному при подстановке (5.78). Его решения $u^*(x)$ и решения, полученные в первом случае, будут комплексно сопряжены. Однако вещественная функция $\operatorname{Re} u^*(x) \exp(j\omega t)$, являющаяся решением исходного уравнения (5.74), в обоих случаях будет одной и той же, поскольку вещественные части комплексно-сопряженных чисел равны. Поэтому обе подстановки (5.78) и (5.79) эквивалентны, вследствие чего можно пользоваться только одной из них.

Наряду с однородным уравнением (5.74) можно также рассматривать неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = -\rho. \quad (5.82)$$

Функции ρ можно приписать смысл плотности распределения источников волн.

Теория уравнения Гельмгольца во многом напоминает теорию однородного и неоднородного уравнений Лапласа. В частности, для уравнения Гельмгольца также характерна постановка граничных задач: Дирихле, Неймана и смешанной. Эти задачи могут быть внешними или внутренними. Формулировка внутренних задач совпадает с данной в разделе 5.2, в формулировку внешних задач оказывается необходимым ввести дополнительное условие, относящееся к поведению решения в бесконечно удаленной точке. Это условие рассматривается ниже применительно к регулярным решениям граничных задач.

Кроме граничных задач, для уравнения Гельмгольца возникает и совершенно новый тип задач на определение собственных колебаний.

5.5.3. Постановка внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца

Как было показано ранее, всякое уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к виду

$$\Delta v + cv = 0. \quad (5.83)$$

Свойства решения уравнения (5.83) существенно зависят от знака коэффициента c , что физически очевидно, если иметь в виду диффузионную интерпретацию этого уравнения.

Остановимся на вопросе единственности решения первой краевой задачи уравнения (5.83). Для уравнения $\Delta v + cv = 0$ при $c < 0$ имеет место принцип максимального значения в следующей форме: *решение $v(M)$ уравнения $\Delta v + cv = 0$ ($c < 0$), определенное внутри некоторой области T с границей S , не может достигать во внутренних точках области T положительных максимальных (и отрицательных минимальных) значений.*

В самом деле, допустим, что в некоторой точке M_0 , лежащей внутри T , функция $v(M)$ достигает положительного максимального значения [$v(M_0) > 0$]. Тогда в точке M_0

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leq 0$$

и, следовательно, $\Delta v \leq 0$, что находится в противоречии с отрицательностью коэффициента c и положительностью $v(M_0)$.

Из принципа максимального значения автоматически следует единственность решения первой краевой задачи для уравнения (5.84).

Может существовать только одно решение уравнения $\Delta v + cv = 0$ ($c \leq 0$), определенное и непрерывное в замкнутой области $T + \Sigma$, принимающее на границе Σ заданные значения

$$v|_{\Sigma} = f.$$

Действительно, допуская существование двух различных решений v_1 и v_2 , рассматривая их разность $v_1 - v_2$ и проводя рассуждения способом, изложенным выше, приходим к противоречию с принципом максимального значения.

Если $c = 0$, то получаем первую краевую задачу для уравнения Лапласа, единственность решения которой была доказана.

5.5.4. Постановка внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца

В разделе 5.5.3 рассмотрена проблема единственности решения внутренних граничных задач для уравнения Гельмгольца. Сформулирована альтернатива, согласно которой решения внутренних задач всегда единственны с точностью до свободных колебаний.

Перейдем теперь к рассмотрению внешних граничных задач. Покажем, что справедлива следующая теорема единственности: решение внешних задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k = k' + jk''$$

в классе регулярных функций, удовлетворяющих в бесконечности условию излучения:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{jk'r} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - jku \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u = 0 \quad (5.84)$$

единственно.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что решения внешних однородных задач Дирихле и Неймана, удовлетворяющие в бесконечности условию излучения, тождественно равны нулю.

Пусть V — бесконечная область, в которой ищется решение граничной задачи, ∂V — ее граница, Σ — сферическая поверхность радиуса r , содержащая поверхность ∂V внутри себя.

Рассмотрим положительную форму

$$\Re = 0,5 \left[\sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (5.85)$$

где c — скорость света, а

$$v = \operatorname{Re} e^{-jckt} u. \quad (5.86)$$

Заметим, что функция v удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta v = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (5.87)$$

Действительно, приняв во внимание, что функция u удовлетворяет уравнению Гельмгольца, получим:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \operatorname{Re}(-k^2 e^{-jckt} u) = \operatorname{Re}(e^{-jckt}) \Delta u = \Delta \operatorname{Re}(e^{-jckt}) u = \Delta v,$$

что и утверждалось.

Продифференцируем $\Re$ по t :

$$\frac{\partial \Re}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\alpha} \partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Подставив в последний член правой части выражение для $(1/c^2)(\partial^2 v / \partial t^2)$ из уравнения (5.85), после несложных преобразований придем к соотношению:

$$\frac{\partial \Re}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}}.$$

Применив теперь к $\partial \mathfrak{R} / \partial t$ в области V^* , заключенной между поверхностями $\mathfrak{Z}V$ и Σ , формулу Остроградского, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V^*} \mathfrak{R} dV = \iint_{\mathfrak{Z}V} T_n dS + \iint_{\Sigma} T_n dS, \quad (5.88)$$

где T_n — нормальная к границам $\mathfrak{Z}V$ и Σ компонента вектора T , имеющего своими компонентами по осям величины

$$T_i \equiv \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Из выражений для T_i ясно, что

$$T_n \equiv \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dv}{dn}.$$

Выразим теперь v через u с помощью соотношения (5.86). Введя обозначения

$$k = k' + jk'', \quad u = u' + ju'', \quad (5.89)$$

где k' , k'' , u' , u'' соответственно вещественная и мнимая части k и u , запишем соотношение (5.86) в форме

$$v = e^{ck't} (u' \cos ck't + u'' \sin ck't), \quad (5.90)$$

откуда

$$\begin{aligned} T_n \equiv \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dv}{dn} &= c e^{2ck't} \left(\frac{du'}{dn} \cos ck't + \frac{du''}{dn} \sin ck't \right) \times \\ &\times [(k''u' + k'u'') \cos ck't + (k''u'' - k'u') \sin ck't]. \end{aligned} \quad (5.91)$$

В силу любого из граничных условий $u = 0$ или $(du/dn) = 0$, когда $x \in \mathfrak{Z}V$; на поверхности $\mathfrak{Z}V$ $T_n = 0$, так что интеграл по $\mathfrak{Z}V$ в формуле (5.88) равен нулю.

Для оценки интеграла по Σ воспользуемся условием излучения (5.84) и оценкой

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad u = e^{-k''r} o\left(\frac{1}{r}\right), \quad (5.92)$$

которые при обозначениях (5.93) представим в виде:

$$\begin{aligned} u' &= e^{-k''r} o\left(\frac{1}{r}\right), \quad u'' = e^{-k''r} o\left(\frac{1}{r}\right); \\ -\frac{\partial u'}{\partial r} &= k''u' + k'u'' + o\left(\frac{e^{-k''r}}{r}\right); \\ -\frac{\partial u''}{\partial r} &= k''u'' - k'u' + o\left(\frac{e^{-k''r}}{r}\right). \end{aligned}$$

Символ $o(\zeta)$ здесь означает совокупность членов более высокого порядка малости, чем ζ . Подставив эти оценки в формулу (5.91) и приняв во внимание,

что на Σ $\frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial r}$, получим

$$T_n = -ce^{2ck't} \times \left[(k''u' + k'u'') \cos ck't + (k''u'' - k'u') \sin ck't \right] + O\left(\frac{e^{-2k'r}}{r^2}\right),$$

откуда ясно, что

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \Re dV = -ce^{2ck't} \right] \times \frac{1}{n} \times \\ \times \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{\Sigma} [(k''u' + k'u'') \cos ck't + (k''u'' - k'u') \sin ck't]^2 dS. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Если $k'' \neq 0$, то подынтегральное выражение интеграла по Σ представляет бесконечно малую величину по сравнению с $(1/r^2)$.

Поэтому данный интеграл при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю, вследствие чего

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \Re dV = 0, \quad \iiint_V \Re dV = \text{const}. \quad (5.94)$$

Подставив сюда выражение (5.85) для $\Re$, приняв во внимание формулу (5.90) и положив один раз $t = 0$, а в другой раз $t = t$, придем к выводу, что в силу соотношений (5.91) при всех t должно соблюдаться равенство

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[\sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial u'}{\partial x_\alpha} \right)^2 + c^2 (k''u' + k'u'')^2 \right] dV = \\ & = e^{2ck't} \cos ck't \iiint_V \left[\sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial u'}{\partial x_\alpha} \right)^2 + c^2 (k''u' + k'u'')^2 \right] dV + \\ & + e^{2ck't} \cos ck't \iiint_V \left[\sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial u''}{\partial x_\alpha} \right)^2 + c^2 (k''u'' + k'u')^2 \right] dV + \\ & + 2e^{2ck't} \cos ck't \sin ck't \iiint_V \left[\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial u'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u''}{\partial x_\alpha} + \right. \\ & \left. + c^2 (k''u' + k'u'')(k''u'' - k'u') \right] dV, \end{aligned}$$

возможное только в том случае, если все входящие сюда интегралы равны нулю. Так как подынтегральные выражения интегралов, являющихся коэффициентами при $\cos ck't$ и $\sin ck't$, неотрицательны, то в области V $k''u' + k'u'' = 0$, $k''u'' - k'u' = 0$, откуда следует, что в этой области $u' = u'' = 0$ и $u \equiv 0$. Таким образом, для $k'' \neq 0$ теорема доказана.

Если же $k'' = 0$, то из соотношений (5.85) и (5.90) следует, что $\iiint_V \Re dV$ — периодическая функция времени и, значит, ее производная по t неограниченное число раз меняет знак. Но правая часть соотношения (5.93) имеет определенный знак. Поэтому соблюдение соотношения (5.93) возможно только в том случае, если обе его части равны нулю, откуда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{\Sigma} (u'' \cos ck't + u' \sin ck't)^2 dS = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{\Sigma} |u|^2 dS = 0.$$

Отсюда, в силу основной леммы теории уравнения Гельмгольца, следует, что в области V $u \equiv 0$. Тем самым теорема доказана полностью.

Можно видеть, что доказательство теоремы может быть проведено до конца и в том случае, если при $k'' \neq 0$ условие излучения брать не в форме (5.84), а в форме:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u = 0, \quad k'' > 0,$$

так как обращение интеграла $\iint_{\Sigma} T_n dS$ в нуль при $r \rightarrow \infty$ обеспечивается экспоненциальным убыванием функций u' и u'' .

5.5.5. Методы решения уравнений Гельмгольца

Общие сведения. Существует большое число методов, с помощью которых могут быть разрешены краевые задачи, описываемые с помощью дифференциальных уравнений Гельмгольца. Из наиболее используемых, с целью получения эффективных решений, можно рекомендовать: методы теории потенциала; методы разложения по собственным функциям; методы разделения переменных; методы интегральных преобразований и метод конформных отображений. Практически это те же методы, которые эффективно используются при решении задач Лапласа и Пуассона и могут быть рекомендованы при решении всех видов эллиптических уравнений. Для желающих подробно познакомиться с эффективными методами решения эллиптических уравнений можно рекомендовать раздел 5.4.1 настоящего пособия и [5.17].

Наиболее распространенным методом решения уравнений Гельмгольца в аналитических областях можно считать метод разделения переменных, о котором мы будем говорить ниже.

Метод разделения переменных. Используя подход раздела 5.4.2, построим решения уравнения Гельмгольца с разделенными переменными в конкретных системах координат.

Прямоугольные координаты (x, y, z) . Уравнение Гельмгольца в декартовых координатах

$$\Delta u + k^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \quad (5.95)$$

имеет решение с разделенными переменными вида (5.33). Выделим специальное решение в декартовых координатах

$$U^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \beta, k) = \exp(\pm az + i\lambda x + i\beta y), \quad (5.96)$$

в которое входят плоские волновые функции; $a = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2}$; $0, 5\pi > \arg a \geq -0, 5\pi$; λ, β — произвольные комплексные постоянные разделения.

Цилиндрические координаты (ρ, z, φ) . Уравнение Гельмгольца в цилиндрических координатах имеет решения с разделенными переменными вида (5.36), которое содержит специальные решения:

$$U_m^{(2)}(\rho, z, \varphi; \lambda, k) = I_m(v\rho) \exp(i\lambda z + im\varphi); \quad (5.97)$$

$$\tilde{U}_m^{(2)}(\rho, z, \varphi; \lambda, k) = \tilde{K}_m(v\rho) \exp(i\lambda z + im\varphi); \quad (5.98)$$

$$V^{(\pm 2)}(\rho, z, \varphi; \lambda, k) = J_m(\lambda\rho) \exp(\mp i\lambda z + im\varphi), \quad (5.99)$$

где $m = 0, \pm 1, \dots; -\infty < \lambda < \infty$; $v = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$; $0, 5\pi > \arg v \geq -0, 5\pi$.

Решения (5.97) и (5.99) регулярны в любой конечной области пространства, решения (5.98) имеют особенность на оси Oz и удовлетворяют условию в бесконечности.

Сферические координаты (r, θ, φ) . Уравнение Гельмгольца в сферических координатах имеет решение с разделенными переменными вида (5.41). В дальнейшем будем использовать специальные сферические решения:

$$U_{nm}^{(3)}(r, \theta, \varphi) = j_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi); \quad (5.100)$$

$$\tilde{U}_{nm}^{(3)}(r, \theta, \varphi) = h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (5.101)$$

$$n = 0, 1, \dots; m = 0, \pm 1, \dots, \pm n.$$

Решения (5.100) регулярны в любой конечной области пространства, решения (5.101) удовлетворяют условию в бесконечности.

Координаты вытянутого сфероида (ξ, η, φ) . Уравнение Гельмгольца в координатах вытянутого сфероида имеет решения с разделенными переменными вида (5.46). Рассмотрим решения с разделенными переменными специального вида [5.6]:

$$U_{mn}^{(4)}(\xi, \eta, \varphi; f) = R_{mn}^{(1)}(f, \xi) S_{mn}^{(1)}(f, \eta) \exp(im\varphi); \quad (5.102)$$

$$\tilde{U}_{mn}^{(4)}(\xi, \eta, \varphi; f) = R_{mn}^{(3)}(f, \xi) S_{mn}^{(1)}(f, \eta) \exp(im\varphi), \quad (5.103)$$

$$f = ck; n = 0, 1, \dots; m = 0, \pm 1, \dots, \pm n.$$

Решения (5.102) регулярны в любой конечной области пространства, решения (5.103) удовлетворяют условию в бесконечности.

Координаты сплюснутого сфероида (ξ, η, φ) . Для координат сплюснутого сфероида рассмотрим решения с разделенными переменными вида в сплюснутых сфероидальных координатах и выделим гармонические функции вида [5.6]:

$$U_{mn}^{(s)}(\xi, \eta, \varphi; f) = R_{|m|,n}^{(1)}(-if, i\xi) S_{m,n}^{(1)}(-if, \eta) \exp(im\varphi); \quad (5.104)$$

$$\tilde{U}_{mn}^{(s)}(\xi, \eta, \varphi; f) = R_{|m|,n}^{(s)}(-if, i\xi) S_{m,n}^{(1)}(-if, \eta) \exp(im\varphi), \quad (5.105)$$

где $n = 0, 1, \dots$; $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$.

Контрольные вопросы к главе 5

- 5.1. Какие дифференциальные уравнения в частных производных называются уравнениями эллиптического типа?
- 5.2. Какие простейшие физические задачи можно описать уравнениями эллиптического типа?
- 5.3. Какие граничные условия используются при постановке краевых задач, описываемых эллиптическими уравнениями?
- 5.4. Какие начальные условия используются при постановке краевых задач, описываемых эллиптическими уравнениями?
- 5.5. Каким образом доказывается единственность решения краевой задачи с эллиптическими уравнениями?
- 5.6. Какие методы используются при решении краевых задач с эллиптическими уравнениями?
- 5.7. Покажите применение теоремы Остроградского–Гаусса при решении краевых задач с эллиптическими уравнениями.
- 5.8. Покажите применение теоремы Стокса при решении краевых задач с эллиптическими уравнениями.
- 5.9. Приведите пример решения краевой задачи с эллиптическими уравнениями методом разделения переменных.

Библиографический список к главе 5

- 5.1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 768 с.
- 5.2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: ИИЛ. Т.1, 1958. — 930 с.
- 5.3. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: ИИЛ. Т.1, 1958. — 930 с.
- 5.4. Лойцанский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.
- 5.5. Аполлонский С. М. Электромагнитное поле в неоднородных средах. Учебное пособие. — СПб.: Изд-во СЗТУ, 2006. — 537 с.
- 5.6. Ерофеев В. Т. Теоремы сложения. — Минск: Наука и техника, 1989. — 256 с.

- 5.7. *Карпук А. А.* Дифракция поля излучения горизонтального диполя на круговом отверстии в плоском экране в присутствии соосного ему кругового диска // Диф. уравнения. 1972. Т. 8. №10. — С. 1804–1815.
- 5.8. *Шестопалов В. П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. — Киев: Наук. думка, 1983. — 251 с.
- 5.9. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. — Минск: Наука и техника, 1968. — 583 с.
- 5.10. *Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. — Минск: Университетское, 1988. — 246 с.
- 5.11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1971. — 576 с.
- 5.12. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовича, И. Стиган; пер. с англ. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1979. — 830 с.
- 5.13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М., 1974. — 295 с.
- 5.14. *Ватсон Г. Н.* Теория Бесселевых функций. — М., 1949. Т. 1. — 798 с.
- 5.15. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и сфероидальных функций. — М.: ИЛ, 1952. — 455 с.
- 5.16. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. — М.: Гостехтеоретиздат, 1953. — 380 с.
- 5.17. *Азошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П.* Методы решения задач математической физики / под ред. Г. И. Марчука. — М.: ИВМ РАН, 2001. — 399 с.

Часть II

Методы математической физики в задачах электротехники

Глава 6

Электрические цепи с распределенными параметрами

6.1. Установившиеся процессы в цепях с распределенными параметрами

6.1.1. Уравнения однородной линии

При рассмотрении электромагнитных процессов, происходящих в линиях, служащих для передачи энергии, а также в телеграфных и телефонных линиях, необходимо иметь в виду, что магнитное и электрическое поля (МП и ЭП), связанные с ними, распределены вдоль всей линии и что превращение электромагнитной энергии в тепло также происходит вдоль всей линии. Такого рода электрические цепи, в отличие от цепей с сосредоточенными параметрами, называют цепями с *распределенными параметрами*.

Изучая линии, необходимо учитывать как сопротивление проводов линии, так и то обстоятельство, что с ними связано МП и что, следовательно, линия обладает индуктивностью. Кроме того, необходимо иметь в виду, что между проводами линии существует ЭП и что, следовательно, провода линии обладают емкостью друг относительно друга. Следует также принять во внимание, что вследствие несовершенства изоляции проводимость между проводами линии, вообще говоря, не равна нулю.

Рассмотрим однородную линию, т. е. линию, сопротивление и индуктивность которой, а также проводимость и емкость между проводами равномерно распределены вдоль ее длины. Обозначим сопротивление и индуктивность на единицу длины двухпроводной линии через r и L , а проводимость и емкость на единицу длины линии через g и C . В дальнейшем предположим, что параметры линии r , g , L , C постоянны.

Напряжение между проводами и ток в проводах линии в каждый момент времени различны в различных точках линии и являются поэтому функциями двух независимых переменных — времени t и расстояния x от точки линии, выбранной за начало.

Пусть в некоторый момент времени напряжение и ток на расстоянии x от начала равны соответственно u и i (рис. 6.1). Тогда в тот же момент времени

напряжение и ток на расстоянии $x + x dx$ от начала будут $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$. Рассматривая участок линии длиной dx , мы видим, что падение напряжения на этом участке должно иметь две составляющие: $r i dx$, преодолевающую сопротивление этого участка, и $L dx \frac{\partial i}{\partial t}$, уравнивающую ЭДС самоиндукции, возникающую на этом участке, то есть

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = r dx i + L dx \frac{\partial i}{\partial t}$$

или

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r i + L \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (6.1)$$

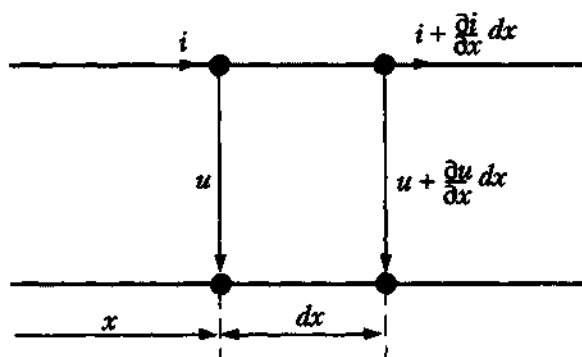


Рис. 6.1. Физическая модель однородной длинной линии

Разность токов в начале и в конце участка dx вызывается тем, что на этом участке от провода к проводу отходят ток проводимости $g dx$ и ток смещения $C dx \frac{\partial u}{\partial t}$, то есть

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = g dx u + C dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

или

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g u + C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6.2)$$

Уравнения (6.1) и (6.2) в частных производных и являются уравнениями однородной линии. Они дают возможность по заданным начальным и граничным условиям найти напряжение и ток в линии как функции x и t .

В общем случае для n — проводной линии, расположенной в воздухе над поверхностью земли, для каждого из проводов необходимо в первом уравнении учитывать также ЭДС взаимоиנדукции от токов, протекающих в соседних проводах, а во втором уравнении учитывать также ток смещения между рассматриваемым проводом и всеми соседними проводами. При этом получаем систему из $2n$ уравнений (так называемых «телеграфных уравнений»):

$$-\frac{\partial u_k}{\partial x} = r_k i_k + L_k \frac{\partial i_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{m=n} M_{km} \frac{\partial i_m}{\partial t}; \quad (6.3)$$

$$-\frac{\partial i_k}{\partial x} = g_k u_k + C \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{m=n} C_{km} \frac{\partial (u_k - u_m)}{\partial t}, \quad (6.4)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$ — номер провода; r_k, L_k, g_k, C_k — собственные параметры k -го провода на единицу длины с учетом влияния земли; M_{km} и C_{km} — взаимная индуктивность и емкость между k -м и m -м проводами на единицу длины линии с учетом влияния земли.

Уравнения (6.3) и (6.4) представляют собой гиперболические уравнения, которые при решениях в стационарных и квазистационарных режимах работы однородной линии переходят в эллиптические уравнения, при рассмотрении переходных процессов — в волновые уравнения.

Ниже будут рассмотрены различные режимы работы двухпроводной однородной линии и методы решения. Данные решения представляют определенный интерес не только потому, что это наиболее простой случай, позволяющий установить основные особенности процессов в цепях с распределенными параметрами, но также и потому, что во многих случаях трехфазная линия, представляющая основную передачу электроэнергии в ЭЭС, может быть заменена эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Это можно сделать при синусоидальном процессе, если все провода находятся в одинаковых условиях, т. е. если осуществлена транспозиция проводов — последовательная перестановка их местами, и если полный цикл транспозиции значительно меньше длины волны тока и напряжения в линии. При этом для симметричных трехфазных напряжений прямой и обратной последовательностей токи в проводах также образуют симметричные системы соответственно прямой и обратной последовательностей. В этом случае достаточно рассматривать процесс в одной фазе, заменяя трехфазную линию эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Для напряжений и токов нулевой последовательности трехпроводную трехфазную линию также можно заменить эквивалентной двухпроводной, причем обратным проводом в этом случае является провод, эквивалентный земле при трехфазной линии.

6.1.2. Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме

К зажимам двухпроводной линии приложено синусоидальное напряжение с угловой частотой ω . При установившемся режиме все токи и напряжения

в линии будут также синусоидальными функциями времени той же частоты. Переходя к изображению синусоидальных напряжений и токов комплексами $\dot{U}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ и $\dot{I}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ — комплексные действующие значения напряжения и тока, зависящие только от x , из уравнений (6.1) и (6.2) найдем:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (r + j\omega L)\dot{I}; \quad (6.5)$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = (g + j\omega C)\dot{U}. \quad (6.6)$$

Взяв производную по x от уравнения (6.5), получим:

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)\frac{d\dot{I}}{dx}$$

и, подставив значение $\frac{d\dot{I}}{dx}$ из уравнения (6.6), найдем:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C)\dot{U}.$$

Полагая $(r + j\omega L)(g + j\omega C) = \gamma^2$, имеем:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \gamma^2\dot{U} = 0 \quad (6.7)$$

Решение уравнения (6.7) для $\dot{U}$ (6.2) можно записать в виде:

$$\dot{U} = A_1 \exp(-\gamma x) + A_2 \exp(\gamma x). \quad (6.8)$$

Тогда для $\dot{I}$ получим:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{1}{r + j\omega L} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{r + j\omega L} [A_1 \exp(-\gamma x) - A_2 \exp(\gamma x)] = \\ &= \sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}} [A_1 \exp(-\gamma x) - A_2 \exp(\gamma x)] \end{aligned}$$

и, положив

$$\sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}} = Z,$$

найдем:

$$\dot{I}Z = A_1 \exp(-\gamma x) - A_2 \exp(\gamma x).$$

Комплексы $\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \beta + j\alpha$ и $Z = z \exp(j\vartheta)$ являются основными характеристиками однородной линии и их называют соответственно *коэффициентом распространения* и *характеристическим* или *волновым сопротивлением* линии.

Определим постоянные интегрирования A_1 и A_2 для случаев, когда заданы напряжение и ток или в начале линии, или в ее конце. Пусть известны напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$ в начале линии. Тогда, приняв начало линии за начало отсчета расстояний и положив $x = 0$, имеем:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A_1 + A_2; \dot{I}_1 Z = A_1 - A_2; \\ A_1 &= 0,5(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z); A_2 = 0,5(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\dot{U} = 0,5(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) \exp(-\gamma x) + 0,5(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z) \exp(\gamma x); \quad (6.9)$$

$$\dot{I} = 0,5\left(\dot{I}_1 + \frac{\dot{U}_1}{Z}\right) \exp(-\gamma x) + 0,5\left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{U}_1}{Z}\right) \exp(\gamma x). \quad (6.10)$$

Пусть известны напряжение $\dot{U}_2$ и ток $\dot{I}_2$ в конце линии. В этом случае целесообразнее вести отсчет расстояний от конца линии, для чего в выведенных уравнениях достаточно заменить x на $l - x$, где l — длина линии. Тогда имеем:

$$\dot{U} = A_1 \exp(-\gamma l) \exp(\gamma x) + A_2 \exp(\gamma l) \exp(-\gamma x) = A_3 \exp(\gamma x) + A_4 \exp(-\gamma x);$$

$$\dot{I} Z = A_1 \exp(-\gamma l) \exp(\gamma x) - A_2 \exp(\gamma l) \exp(-\gamma x) = A_3 \exp(\gamma x) - A_4 \exp(-\gamma x),$$

если положить $A_1 \exp(-\gamma l) = A_3$ и $A_2 \exp(\gamma l) = A_4$. Далее, полагая $x = 0$, получим:

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= A_3 + A_4; \dot{I}_2 Z = A_3 - A_4; \\ A_3 &= 0,5(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z); A_4 = 0,5(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\dot{U} = 0,5(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z) \exp(\gamma x) + 0,5(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z) \exp(-\gamma x); \quad (6.11)$$

$$\dot{I} = 0,5\left(\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z}\right) \exp(\gamma x) + 0,5\left(\dot{I}_2 - \frac{\dot{U}_2}{Z}\right) \exp(-\gamma x). \quad (6.12)$$

Весьма часто в выражениях для $\dot{U}$ и $\dot{I}$ переходят к гиперболическим функциям, приняв во внимание, что

$$0,5[\exp(\gamma x) + \exp(-\gamma x)] = \operatorname{ch}(\gamma x); 0,5[\exp(\gamma x) - \exp(-\gamma x)] = \operatorname{sh}(\gamma x).$$

Тогда при заданных $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ и отсчете расстояний от начала линии

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \gamma x; \dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z} \operatorname{sh} \gamma x, \quad (6.13)$$

а при заданных $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ и отсчете расстояний от конца линии

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma x; \dot{I} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma x. \quad (6.14)$$

Нетрудно усмотреть сходство между зависимостями (6.13)–(6.14) и соответствующими зависимостями для однородных симметричных цепных схем (четырёхполюсников) [6.1]. Это сходство объясняется тем, что процессы в однородных линиях и в однородных цепных схемах сходны между собой, и однородную линию можно рассматривать как однородную цепную схему с бесконечно большим числом элементарных звеньев.

Однородная линия представляет собою частный случай симметричного пассивного четырёхполюсника, и поэтому напряжения $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ должны подчиняться линейным зависимостям, установленным для четырёхполюсника.

И действительно, из выражения (6.14) для $\dot{U}$ и $\dot{I}$, полагая $x = l$, получим:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma l; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma l,$$

откуда для постоянных четырёхполюсника A, B, C, D имеем:

$$A = D = \operatorname{ch} \gamma l; \quad B = Z \operatorname{sh} \gamma l; \quad C = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z},$$

причем

$$AD - BC = \operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1.$$

Необходимо иметь в виду, что однородная линия, как и всякий симметричный четырёхполюсник, может быть заменена Т- или П-образной симметричной схемой. Постоянные этих схем легко определяются по постоянным A, B и C , а именно для Т-образной схемы:

$$Z_1 = Z_2 = Z \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{\operatorname{sh} \gamma l} = Z \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{\operatorname{ch} \gamma l + 1}; \quad Y_0 = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z}$$

и для П-образной схемы:

$$Y_1 = Y_2 = \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{Z \operatorname{sh} \gamma l} = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z(\operatorname{ch} \gamma l + 1)}; \quad Z_0 = Z \operatorname{sh} \gamma l.$$

Заметим также, что любой режим работы однородной линии, как и всякого пассивного четырёхполюсника, можно получить наложением соответствующих режимов холостого хода и короткого замыкания.

6.2. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами

6.2.1. Общее решение уравнений однородной неискажающей линии

Введение. В цепях с распределенными параметрами, например с длинными линиями, обмотками электрических машин и трансформаторов и т. п., включение и отключение какого-либо участка (так же как и в цепях с сосредоточен-

ными параметрами) сопровождаются переходными процессами. При большой протяженности линий изменение внешних электрических и магнитных полей, например при грозовых разрядах, также вызывает переходные процессы. Переходные процессы в линиях возникают и при передаче телеграфных и телефонных сигналов, телемеханических импульсов или специальных импульсов для проверки линий и выявления места их повреждения.

Во всех случаях при анализе переходных процессов в цепях с распределенными параметрами необходимо исходить из общих закономерностей и дифференциальных уравнений, рассмотренных в ТОЭ, ч. 2 (см., например, [6.1, с. 342]). Так как линия является примером цепи с распределенными параметрами, в дальнейшем изложении речь будет идти о переходных процессах в линиях.

Аналитическая модель. Для выяснения наиболее характерных особенностей переходных режимов в однородных линиях найдем общее решение уравнений однородной линии:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r i + L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = g u + C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.15)$$

для частного случая неискажающей линии, когда $rC = gL$.

Положим $r/L = g/C = \delta$ и введем вместо u и i новые функции u_1 и i_1 , связанные с u и i соотношениями:

$$u = u_1 \exp(-\delta t); \quad i = i_1 \exp(-\delta t).$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} \exp(-\delta t); \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \exp(-\delta t) - \delta u_1 \exp(-\delta t); \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= \frac{\partial i_1}{\partial x} \exp(-\delta t); \quad \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial i_1}{\partial t} \exp(-\delta t) - \delta i_1 \exp(-\delta t). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Подставляя (6.16) в уравнения линии (6.15) и сокращая на $\exp(-\delta t)$, приведем их к виду:

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t}$$

и, взяв производную от первого по x , а от второго по t , получим:

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = L \frac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t}; \quad -\frac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t} = C \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

Отсюда найдем:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

и, положив $CL = 1/v^2$, придем к волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}. \quad (6.17)$$

Введем вместо x и t новые переменные, а именно:

$$\xi = x - vt; \quad \eta = x + vt.$$

Тогда, приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 1; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = v; \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -v \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + v \frac{\partial u_1}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - 2v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

и подставив найденные значения вторых производных в волновое уравнение, найдем:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Отсюда, интегрируя, получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \vartheta(\eta) \quad \text{и} \quad u_1 = \int \vartheta(\eta) d\eta + \varphi(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

если положить $\int \vartheta(\eta) d\eta = \psi(\eta)$.

Возвращаясь к переменным x и t , можем написать:

$$u_1 = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt),$$

и, следовательно, для напряжения u между проводами линии имеем:

$$u_1 = [\varphi(x - vt) + \psi(x + vt)] \exp(-\delta t). \quad (6.18)$$

Для нахождения i_1 подставим в уравнение $-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t}$ только что найденное выражение для u_1 . Тогда получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i_1}{\partial x} &= C \frac{\partial [\varphi(\xi) + \psi(\eta)]}{\partial t} = C \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] = \\ &= C v \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] = -\sqrt{\frac{C}{L}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

и, проинтегрировав, найдем:

$$i_1 = \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x - vt) - \psi(x + vt) + f(t)]. \quad (6.19)$$

Для определения $f(t)$ подставим найденные для u_1 и i_1 значения в уравнение $-\frac{\partial u_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t}$ и тогда получим $\frac{df(t)}{dt} = 0$. Следовательно, $f(t) = A = \text{const}$.

Однако можно положить $A = 0$, так как при $A \neq 0$ мы могли бы ввести вместо φ и ψ функции $\varphi_1 = \varphi + 0,5A$ и $\psi_1 = \psi - 0,5A$, после чего получились бы выражения для u_1 и i_1 , в которые постоянная A не входит явно. Поэтому можем написать:

$$i_1 = \sqrt{C/L} [\varphi(x - vt) - \psi(x + vt)]$$

и, следовательно, для тока i в линии получим:

$$i = [\varphi(x - vt) - \psi(x + vt)] \exp(-\delta t) / \sqrt{L/C}, \quad (6.20)$$

где $\sqrt{L/C}$ представляет собою, как известно из предыдущего, волновое сопротивление неискажающей линии.

Полученные выражения для напряжения u и тока i можно привести к иному виду, приняв во внимание, что

$$\delta^2 = \frac{r}{L} \frac{g}{C} = \beta^2 v^2 \text{ и } \delta t = \beta vt,$$

где $\beta = \sqrt{rg}$ — коэффициент затухания неискажающей линии, и что, следовательно,

$$\exp(-\delta t) = \exp(-\beta vt) = \exp(\beta(x - vt)) \exp(-\beta x) = \exp(-\beta(x + vt)) \exp(\beta x).$$

На основании последних равенств выражения для u и i можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x - vt) \exp(-\beta x) + \psi(x + vt) \exp(\beta x); \\ i &= [\varphi(x - vt) \exp(-\beta x) - \psi(x + vt) \exp(\beta x)] / \sqrt{L/C}; \end{aligned} \quad (6.21)$$

причем следует иметь в виду, что функции φ и ψ в этих выражениях отличаются от φ и ψ в предыдущих выражениях для напряжения и тока соответственно множителями $\exp[\beta(x - vt)]$ и $\exp[-\beta(x + vt)]$.

6.2.2. Волны в неискажающей линии

Рассмотрим выражения (6.21) для напряжения и тока линии. При этом для простоты сначала допустим, что потери в линии пренебрежимо малы, то есть положим $r = 0$ и $g = 0$. Тогда $\delta = 0$, $\beta = 0$, $\exp(-\delta t) = 1$, $\exp[\beta(x - vt)] = \exp[-\beta(x + vt)] = \exp(-\beta x) = \exp(\beta x) = 1$ для линии без потерь мы получим:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x - vt) + \psi(x + vt); \\ i &= [\varphi(x - vt) / \sqrt{L/C}] + [\psi(x + vt) / (-\sqrt{L/C})]. \end{aligned}$$

Пусть в частном случае $\varphi(x+v) = 0$ и $u = \varphi(x-vt)$. Тогда, положив в последнем равенстве $t = 0$, мы найдем распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени. Возьмем некоторую произвольную точку x и предположим, что она перемещается вдоль линии со скоростью v , т. е. что ее положение определяется координатой $x = x_0 + vt$. Тогда напряжение в этой движущейся точке $u = \varphi(x_0 + vt - vt) = \varphi(x_0)$ не будет зависеть от времени. Так как это заключение справедливо для любой точки, движущейся вдоль линии со скоростью v , то, следовательно, при $u = \varphi(x-vt)$ начальное распределение напряжения перемещается вдоль линии со скоростью v . Иными словами, при $u = \varphi(x-vt)$ вдоль линии распространяется со скоростью v прямая волна напряжения, бегущая вперед и не претерпевающая изменения формы. Аналогично функция $u = \varphi(x+vt)$ определяет обратную волну напряжения, распространяющуюся вдоль линии также без изменения формы со скоростью $(-v)$ или, что то же, распространяющуюся со скоростью v в отрицательном направлении счета расстояний, т. е. бегущую назад.

Таким образом, при отсутствии потерь в линии напряжение, а также и ток в ней могут быть представлены как суммы двух волн, распространяющихся вдоль линии без изменения формы со скоростью $v = 1/\sqrt{LC}$ в противоположных направлениях. При этом в любой точке линии отношение напряжения и тока для прямой волны равно $\sqrt{L/C}$, т. е. волновому сопротивлению линии, зависящему только от параметров линии, а для обратной волны это отношение равно $-\sqrt{L/C}$. При рассмотрении установившихся процессов уже указывалось, что скорость распространения волн в неискажающей однородной линии $v = 1/\sqrt{LC}$ для воздушных линий равна скорости света в воздухе.

Наличие в выражениях для u и i множителя $\exp(-\delta t)$ или, соответственно, в другом их выражении множителей $\exp(-\beta x)$ и $\exp(\beta x)$, причем $\beta = \sqrt{r g}$ показывает, что обе волны, по мере продвижения их вдоль линии, затухают по показательному закону. Причиной затухания волн является постепенное превращение начального запаса энергии электрического и магнитного полей, связанных с линией, в тепло, выделяющееся в проводах, так как $r \neq 0$, а также и в среде, окружающей провода, так как $g \neq 0$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что волны при движении их вдоль линии не затухают. Затухание волн вследствие потерь в линии при необходимости может быть учтено, по крайней мере, для неискажающей линии, так как нами установлено, что в этом случае волны затухают по показательному закону с показателем $\beta x = \sqrt{r g} x$.

При наличии только одних прямых или только одних обратных волн для энергии магнитного и электрического полей на элементе dx , приняв во внимание, что $(u^2/i^2) = (L/C)$, найдем:

$$dW_M = \frac{1}{2} i^2 L dx = \frac{1}{2} u^2 C dx = dW_E.$$

Отсюда следует, что в каждом из этих случаев энергии магнитного и электрического полей на элементе длины линии, а следовательно, и во всей линии,

равны друг другу, и для суммы энергий этих полей на элементе линии получим:

$$dW = dW_M + dW_\Phi = i^2 L dx = u^2 C dx = ui\sqrt{LC} dx$$

и для соответствующей мощности найдем:

$$p = ui = i^2 \sqrt{\frac{L}{C}} = u^2 \sqrt{\frac{C}{L}},$$

откуда следует, что при данном значении напряжения эта мощность тем больше, чем меньше волновое сопротивление линии.

6.2.3. О происхождении и характере волн в линиях

Возникновение волн в линиях обычно связано или с атмосферными разрядами, или с переключениями, т. е. с включением и выключением или самих линий, или устройств, связанных с ними.

Пусть в линии на некотором ее протяжении индуктирован заряд вследствие нахождения над этой частью линии заряженного облака. Если облако, индуктировавшее заряд, разрядится, то этот заряд освободится, и тогда напряжение вдоль линии будет распределено пропорционально заряду, приходящемуся на каждый элемент длины линии. В результате освобождения индуктированного заряда вдоль линии начнут распространяться волны напряжения и тока. Пусть распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени задано функцией $f_0(x)$ (рис. 6.2, а). Волновое сопротивление линии, являющееся в нашем случае вещественным числом, равным L/C , обозначим через z . Тогда, приняв во внимание, что ток в начальный момент времени равен нулю, имеем:

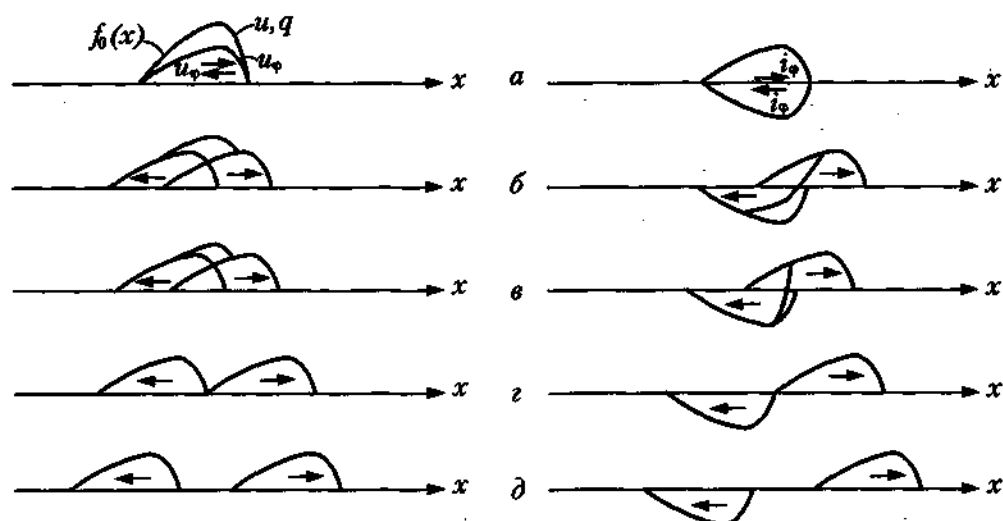
$$\begin{aligned} u_0 &= u_{\varphi 0} + u_{\psi 0} = f_0(x); \\ i_0 &= i_{\varphi 0} + i_{\psi 0} = (u_{\varphi 0} - u_{\psi 0})/z = 0 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$u_{\psi 0} = u_{\varphi 0} = 0,5f_0(x).$$

Таким образом, в начальный момент времени напряжение представляет собою сумму двух равных волн, одинаковых по форме и имеющих один и тот же знак, а ток — сумму двух волн, одинаковых по форме, но имеющих противоположные знаки.

С момента освобождения индуктированного заряда эти волны напряжения, а также и волны тока распространяются по линии в противоположных направлениях, причем скорости всех этих волн по абсолютной величине равны между собою. На рис. 6.2 представлено движение волн напряжения и тока в первые моменты времени после освобождения индуктированного заряда в предположении, что они не затухают.

Рис. 6.2. Распределение напряжения вдоль линии при $t = 0$

При изучении явлений, связанных с переключениями, в тех случаях, когда длина линии мала по сравнению с длиной волны, мы будем предполагать, что внешние ЭДС постоянны. Это предположение допустимо, так как рассматриваемые явления протекают настолько быстро, что в случае синусоидальной ЭДС, имеющей частоту порядка десятков герц, величина этой ЭДС за время пробега волны вдоль всей линии может измениться лишь весьма незначительно. Кроме того, можно считать, что процессы переключения осуществляются мгновенно. В соответствии с этими предположениями в дальнейшем примем, что волны напряжения и тока, идущие от источника внешней ЭДС, имеют прямоугольную форму.

6.2.4. Преломление и отражение волн в месте сопряжения двух однородных линий

Пусть волна ϕ_1 , бегущая от источника ЭДС по однородной линии, имеющей волновое сопротивление z_1 , достигла конца этой линии, в котором последняя соединена с другой однородной линией, имеющей волновое сопротивление z_2 . Обозначив напряжение и ток в первой линии через u_1 и i_1 , а во второй — через u_2 и i_2 , в месте сопряжения обеих линий имеем $u_1 = u_2$ и $i_1 = i_2$. Предположим, что во второй линии до прихода волны из первой линии напряжения не было. Тогда непосредственно после прихода волны к месту сопряжения линий во второй линии может возникнуть лишь волна ϕ_2 , бегущая в том же направлении, что и волна ϕ_1 , и называемая *преломленной* волной, в то время как в первой линии, кроме волны ϕ_1 , называемой *падающей* волной, при $z_2 \neq z_1$ обязательно возникнет волна ϕ_1 , бегущая в обратном направлении и называемая

отраженной волной, так как иначе не могут быть удовлетворены условия равенства напряжений или токов в месте сопряжения линий. Поэтому, отмечая индексами φ_1 , ϕ_1 и φ_2 соответственно падающие, отраженные и преломленные волны, в месте сопряжения линий имеем:

$$u_1 = u_{\varphi_1} + u_{\phi_1} = u_{\varphi_2} = u_2;$$

$$i_1 = (u_{\varphi_1} - u_{\phi_1}) / z_1 = u_{\varphi_2} / z_2 = i_2,$$

откуда

$$u_{\varphi_2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} u_{\varphi_1}; \quad u_{\phi_2} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} u_{\varphi_1};$$

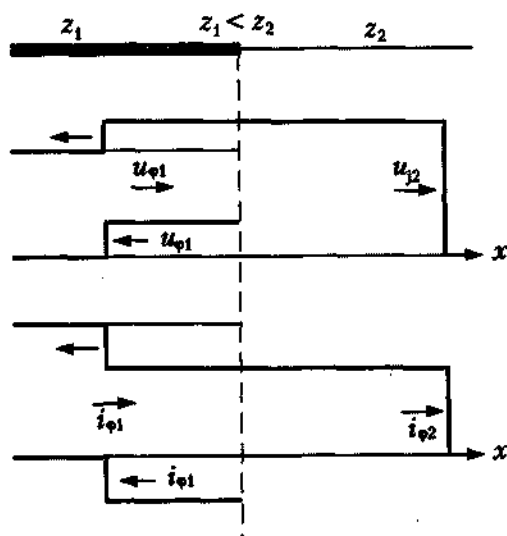
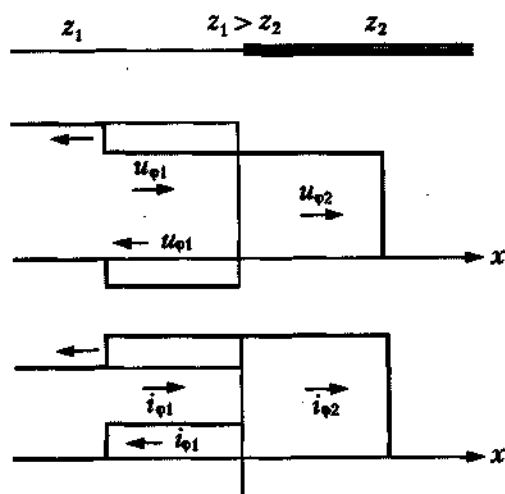
$$i_{\varphi_2} = \frac{2z_1}{z_2 + z_1} i_{\varphi_1}; \quad i_{\phi_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 + z_1} i_{\varphi_1}. \quad (6.22)$$

Из зависимостей (6.22) следует, что в данном случае преломленные и отраженные волны имеют ту же форму, что и падающие волны. Отношения $(u_{\varphi_2} / u_{\varphi_1})$ и $(i_{\varphi_2} / i_{\varphi_1})$ можно рассматривать как коэффициенты преломления, а отношения $(u_{\phi_1} / u_{\varphi_1}) = q_u$ и $(i_{\phi_1} / i_{\varphi_1}) = q_i$ — как коэффициенты отражения.

Из выражений, полученных для преломленных и отраженных волн, следует, что преломленные волны напряжения и тока имеют тот же знак, что и падающие, а из отраженных волн одна сохраняет знак падающей волны, а другая имеет обратный знак.

При $z_1 < z_2$, что, например, имеет место при переходе волны из кабельной линии в воздушную, преломленная волна напряжения больше падающей, а преломленная волна тока меньше падающей. Что касается отраженных волн, то волна напряжения отражается без перемены знака, а волна тока — с переменной знака, причем по абсолютной величине обе эти волны меньше соответствующих падающих волн. При этом вследствие наложения отраженных волн на падающие ток в первой линии уменьшается, а напряжение возрастает, но не более чем в два раза. На рис. 6.3 показаны падающие, преломленные и отраженные волны при $z_2 > z_1$. Заметим, что даже при очень больших значениях z_2 преломленная волна напряжения не может превысить падающую волну более чем в два раза.

При $z_1 > z_2$ преломленная волна напряжения меньше падающей, а преломленная волна тока больше падающей. В этом случае при отражении знак изменяется для волны напряжения, а абсолютные величины обеих отраженных волн опять будут меньше, чем величины соответствующих падающих волн. Вследствие наложения отраженных волн на волны падающие напряжение в первой линии уменьшится, а ток возрастет, но не более чем в два раза (рис. 6.4). Заметим, что даже при очень больших значениях z_2 преломленная волна тока не может превысить падающую волну более чем в два раза.

Рис. 6.3. Падающие, преломленные и отраженные волны при $z_1 < z_2$ Рис. 6.4. Падающие, преломленные и отраженные волны при $z_1 > z_2$

Рассматривая мощность p в месте сопряжения линий, имеем:

$$p = u_1 i_1 = u_2 i_2$$

или

$$(u_{\phi 1} + u_{\phi 1}) \frac{u_{\phi 1} - u_{\phi 1}}{z_1} = \frac{u_{\phi 1}^2}{z_1} - \frac{u_{\phi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\phi 2}^2}{z_2}$$

и, следовательно,

$$\frac{u_{\phi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\phi 1}^2}{z_1} + \frac{u_{\phi 2}^2}{z_2}$$

или

$$P_{\phi 1} = P_{\phi 1} + P_{\phi 2}, \quad (6.23)$$

где $P_{\phi 1}, P_{\phi 1}, P_{\phi 2}$ — мощности падающих отраженных и преломленных волн.

Из (6.23) следует, что часть мощности падающих волн, равная мощности преломненных волн, переходит во вторую линию, а оставшаяся часть, равная мощности отраженных волн, возвращается обратно в первую линию.

Из изложенного следует, что при переходе волны напряжения из линии с меньшим волновым сопротивлением в линию с большим волновым сопротивлением напряжение увеличивается и в пределе может удвоиться. Поэтому напряжение возрастает при переходе волны из кабельной линии в воздушную и из линий передачи в обмотки трансформаторов, которые представляют собою цепи, обладающие значительным волновым сопротивлением, превосходящим волновое сопротивление воздушных линий.

Волны, возникающие в линиях, распространяются с конечной скоростью и могут поэтому вызывать значительные перенапряжения между соседними точками цепи, в одну из которых волна напряжения уже пришла. Эти перенапряжения тем больше, чем круче фронт волны, и наиболее значительны при отвесном фронте волны. В связи с этим первые витки обмоток трансформаторов в соответствующих случаях выполняют со значительно усиленной изоляцией.

6.2.5. Отражение волн от конца линии

Пусть бегущие волны напряжения и тока достигли конца однородной линии, имеющей волновое сопротивление z и замкнутой на сколь угодно сложную цепь с сосредоточенными параметрами. В результате отражения падающих волн ϕ от конца линии возникнут отраженные волны ϕ , и для напряжения u и тока i в конце линии или, иными словами, для напряжения на зажимах оконечной цепи и тока в ней получим:

$$u = u_{\phi} + u_{\phi}; i = i_{\phi} + i_{\phi} = (u_{\phi} - u_{\phi})/z; zi = u_{\phi} - u_{\phi},$$

откуда

$$2u_{\phi} = zi + u.$$

Из этой простой зависимости следует, что ток i можно найти как ток, возникающий в эквивалентной схеме, включаемой под напряжение $2u_{\phi}$ и состоящей из активного сопротивления, равного волновому сопротивлению z линии, и последовательно соединенной с ними оконечной цепи.

Определив ток i по заданным u_+ , z и параметрам конечной цепи, можно найти отраженные волны напряжения и тока из соотношений:

$$u_- = u_+ - zi; \quad i_- = -\frac{u_-}{z}.$$

Рассмотрим, пользуясь этим способом, отражение волн от простейших конечных цепей в предположении, что ЭДС источника падающих волн постоянна.

Пусть однородная линия с волновым сопротивлением z замкнута на сопротивление r_0 . Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивлений z и r_0 , и мы имеем:

$$i = \frac{2u_+}{z + r_0}; \quad u_- = u_+ - zi = \frac{r_0 - z}{r_0 + z} u_+; \quad i_- = -\frac{u_-}{z} = \frac{z - r_0}{z + r_0} i_+.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае получены такие же соотношения между отраженными и падающими волнами, как и в случае отражения волн в месте сопряжения двух линий с той лишь разницей, что вместо волнового сопротивления второй линии вошло сопротивление r_0 , на которое замкнута линия.

При этом для мощности $p = ui$ в конце линии имеем:

$$p = ui = (u_+ + u_-) \frac{u_+ - u_-}{z} = \frac{u_+^2}{z} - \frac{u_-^2}{z} = p_+ - p_-,$$

то есть эта мощность, поглощаемая приемником, равна разности мощностей падающих и отраженных волн. Если сопротивление r_0 равно волновому сопротивлению линии z , то отраженных волн не возникает, и вся мощность падающих волн поглощается приемником.

Из полученных выражений можно установить соотношение между падающими и отраженными волнами в случае отражения волн от конца разомкнутой или короткозамкнутой линии. При разомкнутой линии, полагая $r_0 = \infty$, в конце линии имеем:

$$u_- = u_+; \quad i_- = -i_+.$$

а при короткозамкнутой линии, полагая $r_0 = 0$, в конце линии получим:

$$u_- = -u_+; \quad i_- = i_+.$$

то есть в этих случаях отраженные волны имеют ту же величину, что и падающие, причем при разомкнутой линии с переменной знака отражается волна тока, а при короткозамкнутой линии с переменной знака отражается волна напряжения (рис. 6.5). Таким образом, в результате наложения отраженных волн на падающие в разомкнутой линии напряжение на ее конце возрастает в два раза, а в короткозамкнутой линии ток в ее конце возрастает также в два раза, что можно получить из исследования отражения волн в месте сопряжения двух линий, полагая соответственно или $z_2 = \infty$, или $z_2 = 0$.

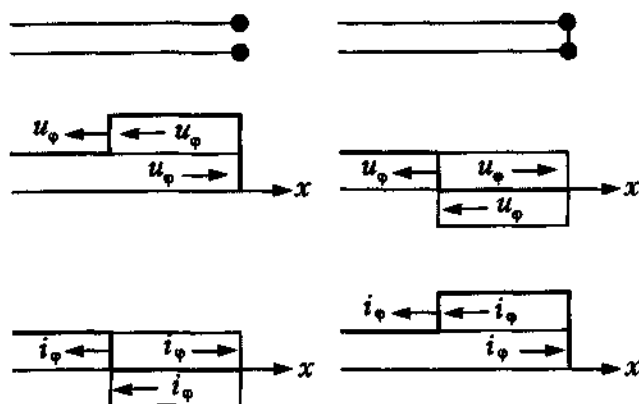


Рис. 6.5. Отражение волн от конца линии

Это можно пояснить следующим образом. И при холостом ходе, и при коротком замыкании падающие волны с присущей им энергией полностью отражаются от конца линии, так как в конце линии энергия не потребляется. Поэтому в той части линии, до которой дошли отраженные волны, энергия в два раза больше энергии падающих волн и, следовательно, в четыре раза больше энергии магнитного поля падающей волны тока, а также в четыре раза больше энергии электрического поля падающей волны напряжения, так как эти энергии равны друг другу.

При холостом ходе линии ток в ее конце должен равняться нулю. Поэтому когда падающая волна тока придет к концу линии, то возникнет равная ей по величине и противоположная по знаку отраженная волна тока, и ток в конце линии упадет до нуля, а энергия магнитных полей, связанных с падающей и отраженной волнами тока, перейдет в энергию электрического поля. Увеличение в конце линии энергии электрического поля в четыре раза повлечет за собой возрастание напряжения в конце линии в два раза. Это повышение напряжения, связанное с переходом энергии магнитного поля в энергию электрического поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

При коротком замыкании линии напряжение в ее конце должно равняться нулю. Поэтому когда падающая волна напряжения придет к концу линии, то возникнет равная ей по величине и противоположная по знаку отраженная волна напряжения, и напряжение в конце линии упадет до нуля, а энергия электрических полей, связанных с падающей и отраженной волнами напряжения, перейдет в энергию магнитного поля. Увеличение в конце линии энергии магнитного поля в четыре раза повлечет за собой возрастание тока в конце линии в два раза. Такое возрастание тока, связанное с переходом энергии электрического поля в энергию магнитного поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

Рассмотрим отражение волн в случае, когда конец однородной линии замкнут на цепь (r_0, L_0) . Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно

соединенных сопротивления $(z + r_0)$ и индуктивности L_0 , и при $u_\phi = \text{const}$ для тока i получим:

$$i = \frac{2u_\phi}{z + r_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right],$$

где $\tau = \frac{L_0}{z + r_0}$, и для u_ϕ и i_ϕ найдем

$$u_\phi = \left[\frac{r_0 - z}{r_0 + z} + \frac{2z}{r_0 + z} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_\phi; \quad i_\phi = \left[\frac{z - r_0}{r_0 + z} - \frac{2z}{r_0 + z} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_\phi. \quad (6.24)$$

Из (6.24), положив $t = 0$, следует, что в первый момент отражение от цепи (r_0, L_0) происходит так же, как и от разомкнутого конца линии. Полагая $t = \infty$, видим, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые ранее были получены для линии, замкнутой на сопротивление r_0 . На рис. 6.6 показаны падающие и отраженные волны для частного случая $r_0 = 0$, когда:

$$u_\phi = \left[-1 + 2 \exp\left(-\frac{z}{L_0} t\right) \right] u_\phi; \quad i_\phi = \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{z}{L_0} t\right) \right] i_\phi.$$

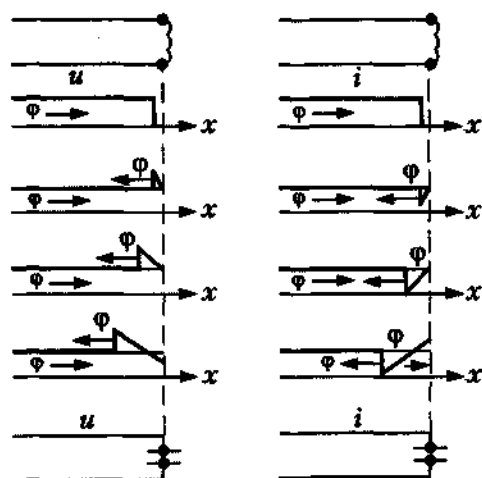


Рис. 6.6. Падающие и отраженные волны для случая $r_0 = 0$

Рассмотрим случай, когда волны отражаются от конца линии, замкнутой на цепь (r_0, C_0) . Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивления $(z + r_0)$ и конденсатора емкостью C_0 , и при $u_\phi = \text{const}$ для тока i мы имеем:

$$i = \frac{2u_\phi}{z + r_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где $\tau = (z + r_0)C_0$, и для u_φ и i_φ найдем:

$$u_\varphi = \left[1 - \frac{2z}{r_0 + z} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_\varphi; \quad i_\varphi = \left[-1 + \frac{2z}{r_0 + z} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_\varphi. \quad (6.25)$$

Из выражений (6.25) при $t = 0$ следует, что в первый момент времени отражение от цепи (r_0, C_0) , происходит так же, как в линии, замкнутой на сопротивление r_0 . Полагая $t = \infty$, нетрудно убедиться, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые мы имели для случая разомкнутой линии. На рис. 6.6 показаны падающие и отраженные волны для частного случая $r_0 = 0$, когда мы имеем:

$$u_\varphi = \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{t}{zC_0}\right) \right] u_\varphi; \quad i_\varphi = \left[-1 + 2 \exp\left(-\frac{t}{zC_0}\right) \right] i_\varphi.$$

Так как до прихода отраженных волн к началу любой однородной линии напряжение на ее входных зажимах равно произведению из тока в начале линии на ее волновое сопротивление, то изложенный способ определения отраженных волн пригоден и в тех случаях, когда к оконечной цепи с сосредоточенными параметрами присоединены те или иные однородные линии. При этом, составляя соответствующую эквивалентную схему, каждую из линий, непосредственно присоединенных к оконечной цепи, следует заменить активным сопротивлением, равным ее волновому сопротивлению, независимо от того, что находится в конце этой линии. Необходимо, однако, иметь в виду, что составленная таким образом эквивалентная схема дает возможность производить расчеты лишь до момента прихода отраженных волн к началу хотя бы одной из линий, учтенных в этой схеме.

6.2.6. Процесс включения однородной линии

Рассмотрим процесс включения под синусоидальное напряжение однородной линии в предположении, что длина линии мала по сравнению с длиной волны. Тогда, как было указано выше, можно пренебречь затуханием волн в начальной стадии процесса включения, а также ограничиться рассмотрением включения линии под действие постоянного напряжения, равного мгновенному значению напряжения в начале линии в момент включения. Пусть, кроме того, внутреннее сопротивление генератора пренебрежимо мало, иными словами, мощность генератора весьма велика. При этом предположении волны напряжения и тока будут отражаться от генератора так, как они отражаются от короткозамкнутого конца линии.

Рассмотрим случай, когда включаемая линия разомкнута на приемном конце, и предположим, что до момента включения напряжение и ток по всей длине линии равны нулю. После включения от генератора вдоль линии начнут распространяться волны напряжения и тока, и когда они дойдут до конца линии, напряжение вдоль линии будет равно напряжению генератора, а ток — напряжению

генератора, деленному на волновое сопротивление линии. Дойдя до разомкнутого конца линии, эти волны отразятся, причем волна напряжения не изменит знака, а волна тока изменит знак. При движении к генератору отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, повышает напряжение в линии до удвоенного напряжения генератора, а отраженная волна тока уменьшает ток в линии до нуля. В тот момент, когда эти волны дойдут до генератора, ток по всей длине линии будет равен нулю, и вся линия будет заряжена до напряжения, равного удвоенному напряжению генератора. Волны, отразившиеся от разомкнутого конца, у генератора претерпят новое отражение, при котором волна напряжения изменит знак, а волна тока сохранит знак, так что получится отрицательная волна напряжения и отрицательная волна тока, идущие от генератора к концу линии. Отрицательная волна напряжения при движении к концу линии понижает напряжение в линию до напряжения, равного напряжению генератора, и одновременно в линии возникает ток, противоположный по направлению первоначальному току. Дойдя до конца линии, отрицательные волны напряжения и тока претерпят третье отражение, в результате которого к генератору пойдет отрицательная волна напряжения, снижающая напряжение в линии до нуля, и положительная волна тока, уменьшающая ток в линии до нуля. Когда эти волны дойдут до генератора, линия будет полностью разряжена, и напряжение и ток по всей длине линии будут равны нулю. Этим и завершится полный цикл процессов, который при сделанных нами предположениях будет периодически повторяться. Отдельные характерные фазы рассмотренного цикла процессов представлены на рис. 6.7.

Полный цикл процесса движения и отражения волн в рассмотренном случае совершается в промежуток времени

$$T = \frac{4l}{v} = 4l\sqrt{LC},$$

где l — длина линии, а v — скорость распространения волн в ней.

Этот промежуток времени T называют периодом собственных колебаний линии. Если бы индуктивность и емкость линии были сосредоточены, то период T_0 собственных колебаний такого контура из катушки с индуктивностью Ll и конденсатора емкостью C/l был бы:

$$T = 2\pi\sqrt{LlCl} = 2\pi l\sqrt{LC},$$

то есть в $\pi/2$ раза больше, чем T .

Наличие потерь в линии ведет к тому, что волны напряжения и тока постепенно затухают, а величины напряжения и тока приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установившемся режиме холостого хода.

В случае включения линии, конец которой замкнут накоротко, волна напряжения, распространяющаяся от генератора, отражается от конца линии с переменной знака, а волна тока — без перемены знака. Отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, понижает напряжение в линии до нуля, а в результате наложения отраженной волны тока ток в линии удваивается. Когда отраженные волны дойдут до генератора, то напряжение во всей

линии будет равно нулю, а ток — удвоенному первоначальному току. Так как при всех последующих отражениях и от генератора и от короткозамкнутого конца линии волна напряжения отражается с переменной знака, то напряжение в линии изменяется между нулем и напряжением генератора.

Отражение волны тока и от генератора и от короткозамкнутого конца линии каждый раз происходит без перемены знака. Поэтому ток в линии после каждого отражения возрастает на величину первоначального тока (рис. 6.8).

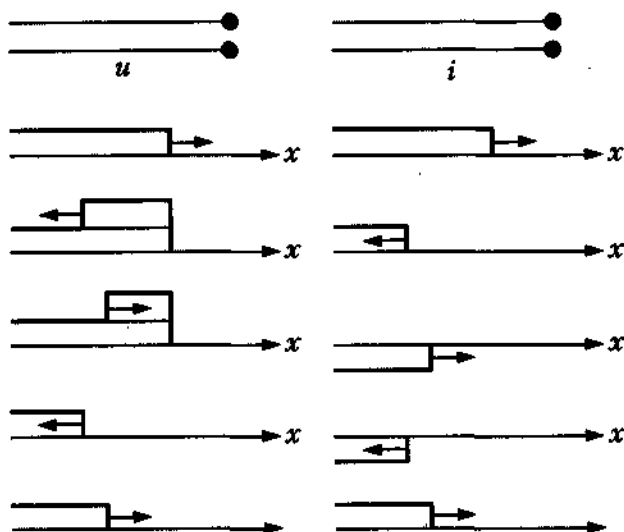


Рис. 6.7. Фазы процесса включения однородной линии

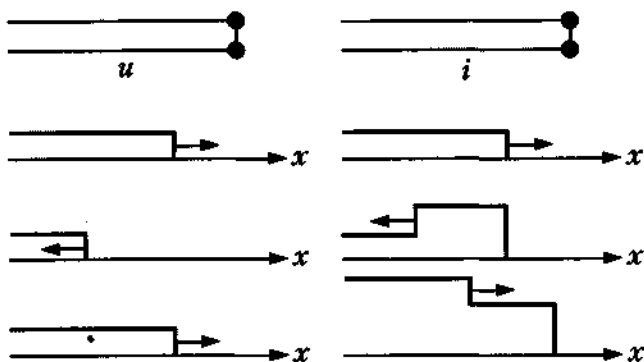


Рис. 6.8. Процессы в однородной линии, замкнутой в конце накоротко

Наличие потерь в линии вызывает затухание волн и ограничивает нарастание тока. По мере затухания волн напряжение и ток приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установившемся режиме короткого замыкания.

Если длина линии сравнима с длиной волны, то за время каждого пробега волны вдоль линии напряжение на зажимах генератора в начале линии успевает заметно измениться. При рассмотрении процессов в линии это изменение должно быть принято во внимание.

6.2.7. Прохождение волн при наличии реактивного сопротивления в месте сопряжения однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями z_1 и z_2 включена последовательно реактивная катушка с индуктивностью L_0 . Тогда, пренебрегая емкостью между витками обмотки катушки, в месте сопряжения линий имеем:

$$i_1 = i_2; u_1 = L_0 \frac{di_2}{dt} + u_2$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать:

$$\frac{u_{\phi 1} - u_{\phi 1}}{z_1} = \frac{u_{\phi 2}}{z_2}; u_{\phi 1} + u_{\phi 1} = \frac{L_0}{z_2} \frac{du_{\phi 2}}{dt} + u_{\phi 2},$$

откуда

$$2u_{\phi 1} = \frac{L_0}{z_2} \frac{du_{\phi 2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2} u_{\phi 2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны имеем $u_{\phi 1} = \text{const}$ и, следовательно,

$$u_{\phi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\phi 1}; i_{\phi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\phi 1},$$

где $\tau = L_0 / (z_1 + z_2)$, и тогда для $u_{\phi 1}$ и $i_{\phi 1}$ найдем:

$$\begin{aligned} u_{\phi 1} &= \left[\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} + \frac{2z_1}{z_2 + z_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\phi 1}; \\ i_{\phi 1} &= \left[\frac{z_1 - z_2}{z_2 + z_1} - \frac{2z_1}{z_2 + z_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\phi 1}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Из (6.26) следует, что в данном случае преломленные волны $u_{\phi 2}$ и $i_{\phi 2}$ нарастают постепенно от значений, равных нулю при $t = 0$, до значений, которые мы имели в случае отсутствия реактивной катушки. Что же касается отраженных волн $u_{\phi 1}$ и $i_{\phi 1}$, то в первый момент они имеют такие же значения, как при отражении от разомкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии катушки. Таким образом, в результате включения реактивной катушки фронт преломленных волн

приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Быстрота нарастания напряжения и тока во второй линии тем меньше, чем больше постоянная времени $\tau = L_0 / (z_1 + z_2)$, т. е. тем меньше, чем больше индуктивность катушки. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию магнитного поля, связанного с реактивной катушкой. Применяя реактивные катушки для сглаживания фронта преломленных волн, следует иметь в виду, что в результате наложения отраженной волны на падающую волну напряжение в первой линии в первые моменты времени удваивается.

На рис. 6.9 показаны падающие, преломленные и отраженные волны для случая $z_1 = z_2$, когда мы имеем:

$$u_{\varphi 2} = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\varphi 1};$$

$$u_{\varphi 1} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 1} = -\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) i_{\varphi 1},$$

где $\tau = L_0 / 2z_1 = L_0 / 2z_2$.

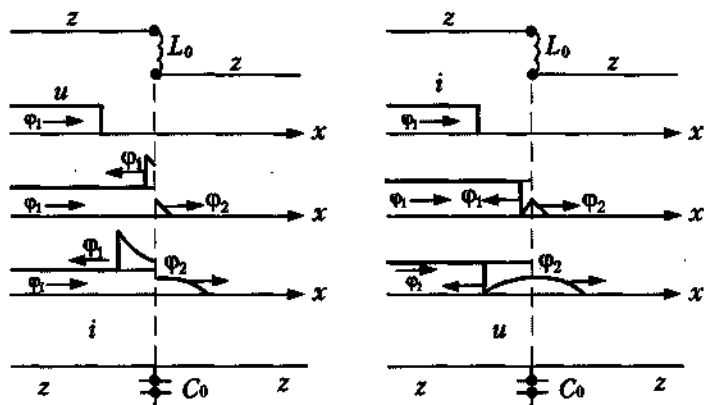


Рис. 6.9. Падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая $z_1 = z_2$

Пусть в месте сопряжения линий включено ответвление, содержащее конденсатор, емкость которого равна C_0 . Тогда в месте сопряжения линий имеем:

$$u_1 = u_2; \quad i = C_0 \frac{du_2}{dt} + i_2$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать:

$$u_{\varphi 1} + u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2}; \quad \frac{u_{\varphi 1} - u_{\varphi 1}}{z_1} = C_0 \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}$$

и, следовательно,

$$2u_{\varphi 1} = z_1 C_0 \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2} u_{\varphi 2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны $u_{\phi 1} = \text{const}$ мы получим:

$$u_{\phi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\phi 1}; \quad i_{\phi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\phi 1},$$

где $\tau = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$, и тогда для $u_{\phi 1}$ и $i_{\phi 1}$ найдем:

$$u_{\phi 1} = \left[\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} - \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\phi 1}; \quad i_{\phi 1} = \left[\frac{z_1 - z_2}{z_2 + z_1} + \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\phi 1}. \quad (6.27)$$

Выражения (6.27) для $u_{\phi 2}$ и $i_{\phi 2}$ аналогичны выражениям (6.26), и в соответствии с этим преломленные волны нарастают постепенно от нуля до тех значений, которые они имеют при отсутствии ответвления. При этом быстрота нарастания их, определяемая постоянной времени $\tau = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$, тем меньше,

чем больше емкость конденсатора C_0 . Что касается отраженных волн $u_{\phi 1}$ и $i_{\phi 1}$, то в первый момент времени они имеют такие же значения, как при отражении от короткозамкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии ответвления.

Таким образом, в результате наличия емкостного ответвления фронт преломленных волн, как и в предыдущем случае, приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию электрического поля конденсатора.

При применении емкостного ответвления для сглаживания фронта преломленных волн отраженная волна напряжения в первый момент времени равна по величине и противоположна по знаку падающей волне, и напряжение в первой линии в момент прихода волны к месту сопряжения линий падает до нуля, а затем постепенно нарастает. На рис. 6.9 показаны падающие, преломленные и отраженные волны для случая $z_1 = z_2$:

$$\begin{aligned} u_{\phi 2} &= \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\phi 1}; \quad i_{\phi 2} = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\phi 1}; \\ u_{\phi 1} &= -\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) u_{\phi 1}; \quad i_{\phi 1} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) i_{\phi 1}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

6.2.8. Прохождение волн при наличии активного сопротивления в месте однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями z_1 и z_2 включено последовательно с ними активное сопротивление r_0 . Тогда в месте сопряжения линий имеем:

$$i_1 = i_2; \quad u_1 = r_0 i_2 + u_2$$

и в случае перехода волны $u_{\phi 1}$ из первой линии во вторую можем написать:

$$\frac{u_{\phi 1} - u_{\phi 1}}{z_1} = \frac{u_{\phi 2}}{z_2}; u_{\phi 1} + u_{\phi 1} = \frac{r_0}{z_2} \frac{d u_{\phi 2}}{d t} + u_{\phi 2},$$

и, следовательно,

$$u_{\phi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\phi 1}; u_{\phi 1} = \frac{z_2 - z_1 + r_0}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\phi 1}. \quad (6.29)$$

Из выражений (6.29) видно, что наличие сопротивления r_0 уменьшает преломленную волну напряжения и что даже при большом значении z_2 , увеличивая r_0 , ее можно довести до сколь угодно малой величины. Отраженная волна $u_{\phi 1}$, при $z_2 > z_1$ с увеличением r_0 возрастает, но не может превзойти величину $u_{\phi 1}$.

Мощность, выделяющаяся в сопротивлении r_0 , равна $p = r_0 i_2^2 = \frac{r_0}{z_2^2} u_{\phi 2}^2$, в то время как мощность падающей волны $p_{\phi 1} = \frac{u_{\phi 1}^2}{z_1}$.

Для отношения этих мощностей имеем:

$$\frac{p}{p_{\phi 1}} = \frac{r_0 z_1}{z_2^2} \frac{u_{\phi 2}^2}{u_{\phi 1}^2} = \frac{4r_0 z_1}{(z_2 + z_1 + r_0)^2},$$

причем при $r_0 = z_2 + z_1$ это отношение достигает максимума, равного $z_1 / (z_2 + z_1)$. Таким образом, значительная часть мощности падающей волны может быть поглощена сопротивлением r_0 лишь при $z_1 \gg z_2$, т. е. когда преломленная волна напряжения мала по сравнению с падающей. Однако при любом соотношении между z_1 и z_2 , взяв $r_0 = z_2 + z_1$, мы получим $u_{\phi 2} = u_{\phi 1} z_2 / (z_1 + z_2)$, и тогда преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии сопротивления r_0 (рис. 6.10).

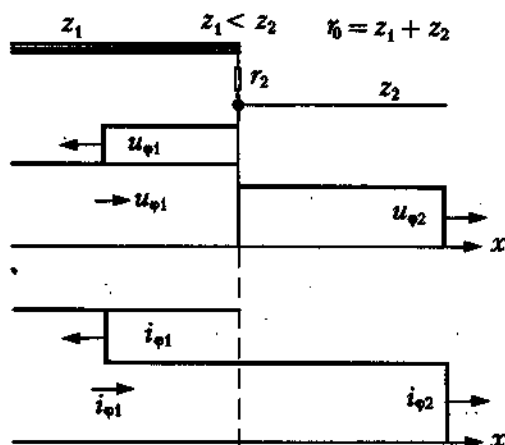


Рис. 6.10. Падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая $r_0 = z_2 + z_1$

Для того чтобы перенапряжения, возникшие на одном участке линии, не распространялись по всей ее длине, между отдельными участками линии включают активные сопротивления, уменьшающие, как мы только что видели, величину волн напряжения при их прохождении из одного участка в другой. Так как для эффективного действия эти сопротивления должны иметь величину порядка 500–600 Ом, то параллельно с ними включают реактивные катушки, имеющие незначительное сопротивление для тока нормальной частоты, но оказывающие в первые моменты значительное сопротивление волнам.

Пусть теперь в месте сопряжения линий включено ответвление, имеющее только активное сопротивление r_0 . Тогда в этом месте

$$u_1 = u_2; i_1 = \frac{u_2}{r_0} + i_2,$$

и в случае перехода волны $u_{\phi 1}$ из первой линии во вторую можем написать:

$$u_{\phi 1} + u_{\phi 1} = u_{\phi 2}; \frac{u_{\phi 1} - u_{\phi 1}}{z_1} = \frac{u_{\phi 2}}{r_0} + \frac{u_{\phi 2}}{z_2}$$

и, следовательно,

$$u_{\phi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1 + \frac{z_2 z_1}{r_0}} u_{\phi 1}; u_{\phi 1} = \frac{z_2 - z_1 - \frac{z_2 z_1}{r_0}}{z_2 + z_1 + \frac{z_2 z_1}{r_0}} u_{\phi 1}.$$

Из этого вытекает, что наличие активного ответвления уменьшает преломленную волну напряжения, причем, уменьшая r_0 , ее можно довести до сколь угодно малой величины. Отраженная волна $u_{\phi 1}$ с уменьшением r_0 возрастает по абсолютной величине, но не может превзойти величину $u_{\phi 1}$.

Мощность, выделяемая в ответвлении, равна $p = \frac{u_{\phi 2}^2}{r_0}$, в то время как мощность падающей волны $p_{\phi 1} = \frac{u_{\phi 1}^2}{z_1}$. Для отношения этих мощностей имеем:

$$\frac{p}{p_{\phi 1}} = \frac{z_1}{r_0} \frac{u_{\phi 2}^2}{u_{\phi 1}^2} = \frac{4z_1 z_2^2}{r_0 \left(z_2 + z_1 + \frac{z_1 z_2}{r_0} \right)^2},$$

причем при $r_0 = z_1 z_2 / (z_1 + z_2)$ это отношение достигает максимума, равного $2z_2 / (z_1 + z_2)$. Таким образом, в рассматриваемом случае при $z_1 \ll z_2$, когда преломленная волна напряжения значительно превосходит падающую, большая часть мощности последней поглощается в активном ответвлении. При этом, взяв $r_0 = z_1 z_2 / (z_1 + z_2)$, мы получим $u_{\phi 2} = [z_2 / (z_1 + z_2)] u_{\phi 1}$, и тогда при любом соотношении между z_1 и z_2 преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии ответвления (рис. 6.11).

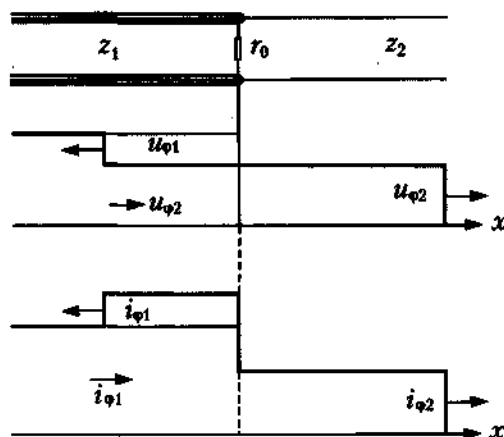


Рис. 6.11. Падающие, преломленные и отраженные волны для случая $r_0 = z_1 z_2 / (z_1 + z_2)$

Во избежание прохождения через ответвление сколь-нибудь значительного тока при нормальной работе линии последовательно с сопротивлением r_0 включают конденсатор, не оказывающий существенного сопротивления прохождению через него волн, но имеющий достаточно большое сопротивление для тока нормальной частоты.

В заключение отметим, что для анализа переходных процессов в линиях с распределенными параметрами можно воспользоваться операторным методом. В случае применения операторного метода к анализу переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами, как мы видели, обыкновенные дифференциальные уравнения для оригиналов переходят в алгебраические уравнения для их изображений. Соответственно, применение этого метода к исследованию процессов в линиях с распределенными параметрами приводит к замене дифференциальных уравнений в частных производных для действительных токов и напряжений обыкновенными дифференциальными уравнениями для их операторных изображений.

Контрольные вопросы к главе 6

- 6.1. Что представляют собой электрические цепи с распределенными параметрами?
- 6.2. Какими уравнениями описываются электрические процессы в однородных линиях?
- 6.3. Какими уравнениями описываются электрические процессы в однородных линиях при установившихся синусоидальных режимах?
- 6.4. Какими уравнениями описываются электрические процессы в однородных линиях при переходных режимах?

Библиографический список к главе 6

- 6.1. *Нейман Л. Р., Калантаров П. Л.* Теоретические основы электротехники. Часть 2. — М.; Л.: Энергоиздат, 1959. — 440 с.
- 6.2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1971. — 576 с.
- 6.3. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. — 10-е изд. — М.: Гардарики, 2002. — 638 с.
- 6.4. Теоретические основы электротехники: В 3-х т. Учебник для вузов. Том 2. — 4-е изд. / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. — СПб.: Питер, 2003. — 576 с.

Глава 7

Математическая модель электромагнитного поля

7.1. Векторы электромагнитного поля

Электромагнитное поле (ЭМП) можно рассматривать как особое свойство материи. Оно характеризуется четырьмя векторными величинами: $\vec{E}$ — напряженностью электрического поля (ЭП); $\vec{D}$ — электрической индукцией; $\vec{H}$ — напряженностью магнитного поля (МП); $\vec{B}$ — магнитной индукцией. Определить ЭМП в некоторой области пространства — значит указать эти векторы в любой ее точке. Таким образом, ЭМП предстает как совокупность ЭП ($\vec{E}$, $\vec{D}$) и МП ($\vec{H}$, $\vec{B}$), находящихся во взаимной зависимости. Деление ЭМП на эти две составляющие относительно, оно зависит от условий наблюдения и возможно только при макроскопическом рассмотрении явлений. При движении заряженного тела в окружающем пространстве возникает ЭМП, и неподвижный наблюдатель обнаружит ЭП и МП по механическим силам, действующим на пробный заряд и магнитную стрелку. Однако наблюдатель с пробным зарядом и магнитной стрелкой, движущейся вместе с заряженным телом, не обнаружит отклонения магнитной стрелки, а отметит только воздействие на пробный заряд. Для такого наблюдателя существует только ЭП, а МП отсутствует.

При микроскопическом рассмотрении всегда обнаруживаются обе стороны ЭМП. Например, при рассмотрении неподвижного заряженного тела необходимо учесть также МП движущихся по своим орбитам электронов, из которых складывается общий заряд тела. Однако из-за хаотического расположения этих элементарных токов их МП чрезвычайно быстро убывает с увеличением расстояния от тела. При макроскопическом подходе вокруг неподвижного заряженного тела учитывается только ЭП.

Поскольку можно создать условия, при которых проявляется одна из составляющих ЭМП, возможно и раздельное изучение ЭП и МП. Это соответствует ряду практических задач, когда в электротехническом устройстве представляет интерес определение только одного из полей.

7.2. Аналитическая связь между электрическими и магнитными явлениями

7.2.1. Законы полного тока и Фарадея

Аналитическая связь между электрическими и магнитными векторами ЭМП сформулирована в виде двух законов.

Поскольку всякий электрический ток обязательно сопровождается МП, то МП неизбежно связано с электрическим током. Связь между электрическим током и напряженностью МП устанавливается законом полного тока

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I, \quad (7.1)$$

то есть криволинейный интеграл вектора напряженности МП $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру $\vec{l}$ равен полному току I , проходящему сквозь поверхность, ограниченную этим контуром. Посредством этого уравнения устанавливается одна из важнейших связей между электрической и магнитной сторонами электромагнитных явлений. Оно определяет МП, возникающее при движении электрически заряженных частиц и при изменении ЭП. Обобщенная формулировка первого уравнения, данная Максвеллом, представляется в виде

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \iint_s \vec{\delta} d\vec{s}, \quad (7.2)$$

где под $\vec{\delta}$ понимается плотность всех видов электрического тока:

$$\vec{\delta} = \vec{\delta}_{\text{пр}} + \vec{\delta}_{\text{см}} + \vec{\delta}_{\text{пер}}, \quad (7.3)$$

включающая $\vec{\delta}_{\text{пр}} = \gamma \vec{E}$ — плотность тока проводимости (γ — удельная электрическая проводимость, $\vec{E}$ — электрическая напряженность); $\vec{\delta}_{\text{см}} = \partial \vec{D} / \partial t$ — плотность тока смещения ($\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ — электрическая индукция, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды); $\vec{\delta}_{\text{пер}} = \rho(\vec{v}_+ - \vec{v}_-)$ — плотность тока переноса (ρ — плотность электрического заряда; $\vec{v}_+, \vec{v}_-$ — скорости переноса положительных и отрицательных зарядов), $\vec{s}$ — площадь сечения, через которое протекает суммарный ток. Уравнение (7.2) называется *первым уравнением Максвелла*, записанное в интегральной форме.

При изменении магнитного тока во времени появляется ЭП. Эта связь установлена Фарадеем и сформулирована им в виде закона электромагнитной индукции для контура (рис. 7.1):

$$e_i = - \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (7.4)$$

где e_i — электродвижущая сила (ЭДС) в контуре i ; Ψ — потокосцепление.

Максвеллу принадлежит заслуга обобщения этого закона для любой среды. По формулировке Максвелла: ЭДС, возникающая в контуре при изменении магнитного потока, проходящего сквозь поверхность, ограниченную контуром,

равна взятой со знаком минус скорости изменения этого потока. Второй закон Максвелла в обобщенном виде представляется следующим образом:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -w \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -w \frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{B} d\vec{s}, \quad (7.5)$$

где w — число витков; Φ — магнитный поток одного витка; $\vec{B}$ — плотность магнитного потока ($\vec{B} = \mu \vec{H}$, μ — магнитная проницаемость среды).

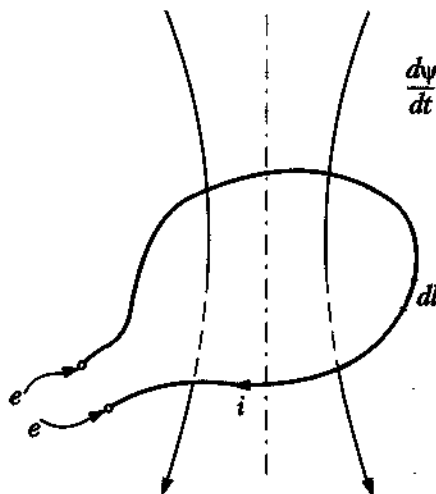


Рис. 7.1. Контур, пересекаемый магнитным потоком

Уравнения (7.2) и (7.5) являются основными уравнениями ЭМП, представленными в интегральной форме.

7.2.2. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Исследуя ЭМП, необходимо определять все величины, его характеризующие, в каждой точке пространства. Поэтому мы не можем удовлетвориться интегральной формой уравнений и должны представить их в дифференциальной форме. Кроме того, решение интегральных уравнений связано, как правило, с большими аналитическими трудностями.

Выразим в дифференциальной форме первое уравнение Максвелла (7.2). Согласно этому уравнению, криволинейный интеграл вектора напряженности МП, взятого по замкнутому контуру, может рассматриваться как мера электрического тока, проходящего сквозь поверхность $\vec{S}$, ограниченную этим контуром. Однако по величине этого интеграла нельзя судить о распределении тока по поверхности $\vec{S}$. Чтобы решить этот вопрос, необходимо воспользоваться этим же уравнением в дифференциальной форме. Допустим, что необходимо выяснить, проходит ли ток сквозь малую поверхность $\Delta \vec{S}$, на которой расположена точка А,

и какова плотность тока в этой точке (рис. 7.2). Линейный интеграл вектора $\vec{H}$, взятый вдоль малого контура, ограничивающего поверхность $\Delta\vec{S}$, равен малому току Δi , проходящему сквозь эту поверхность:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \Delta i$$

и может служить мерой тока. Величина Δi зависит от размеров поверхности $\Delta\vec{S}$.

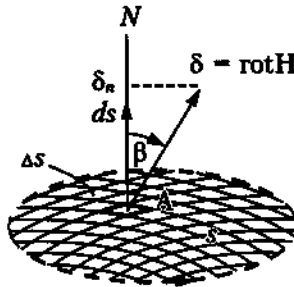


Рис. 7.2. Прохождение магнитного потока сквозь малую поверхность

Для получения вполне определенной величины Δi разделим левую и правую части равенства на $\Delta\vec{S}$ и найдем предел, к которому стремится отношение, когда $\Delta\vec{S} \rightarrow 0$, стягиваясь к точке A:

$$\lim_{\Delta\vec{S} \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta\vec{S}} = \lim_{\Delta\vec{S} \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta\vec{S}}. \quad (7.6)$$

Величина, стоящая в левой части (7.6), представляет собой проекцию на направление нормали к поверхности S в точке A вектора, называемого вихрем, или ротором, вектора $\vec{H}$.

Вихрь вектора $\vec{H}$ обозначают $\text{rot } \vec{H}$:

$$\text{rot}_n \vec{H} = \lim_{\Delta\vec{S} \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta\vec{S}} = \delta_n. \quad (7.7)$$

Если элемент поверхности расположить так, чтобы положительная нормаль к нему совпадала с направлением вектора плотности тока, то предел отношения $\Delta i / \Delta\vec{S}$ получит наибольшее значение, равное плотности тока в точке A, причем направление положительной нормали связывается правилом правого винта с направлением обхода по контуру. Тогда первое уравнение Максвелла (7.2) в дифференциальной форме запишется в виде

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}. \quad (7.8)$$

Аналогичные действия можно выполнить со вторым уравнением Максвелла (7.5).

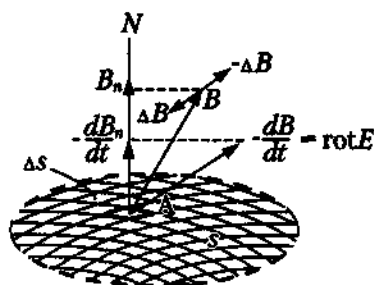


Рис. 7.3. Связь между током контура и магнитным потоком

При этом, рассматривая поле в неподвижных средах, заменим полную производную по времени частной производной. Составим линейный интеграл вектора напряженности ЭП по малому контуру, ограничивающему малую поверхность $\Delta \vec{S}$ (рис. 7.3), разделим его на величину поверхности и найдем предел, к которому стремится полученное отношение, когда поверхность $\Delta \vec{S}$ стремится к нулю, стягиваясь в некоторой точке A поля. При этом получаем проекцию на направление нормали к выбранному элементу поверхности в точке A вихря вектора $\vec{E}$:

$$\lim_{\Delta \vec{S} \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{l}}{\Delta \vec{S}} = \text{rot}_n \vec{E}. \quad (7.9)$$

В правой части уравнения (7.5) потокоцепление $\Delta \Psi$, проходящее сквозь поверхность $\Delta \vec{S}$, необходимо разделить на поверхность $\Delta \vec{S}$ и найти предел, к которому стремится это отношение, когда $\Delta \vec{S} \rightarrow 0$. При этом получается составляющая вектора магнитной индукции $\vec{B}$ в точке A , нормальная к выбранному элементу поверхности:

$$\lim_{\Delta \vec{S} \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta \vec{S}} = \frac{d\Phi}{d\vec{S}} = \vec{B}_n,$$

откуда

$$\text{rot}_n \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t}.$$

Выберем положение элемента поверхности так, чтобы нормаль к нему совпадала с вектором $-\partial \vec{B} / \partial t$. Тогда в левой части равенства получим вихрь вектора $\vec{E}$:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (7.10)$$

Направление вектора $\partial \vec{B} / \partial t$ — направление, к которому стремится направление приращения $\Delta \vec{B}$ вектора магнитной индукции, происходящего за промежуток времени Δt , когда $\Delta t \rightarrow 0$. Если вектор $\vec{B}$ изменяется не только по

величине, но и по направлению, то производная $\partial \vec{B} / \partial t$ не направлена по одной прямой с вектором $\vec{B}$.

Уравнения Максвелла, записанные в векторной форме (7.8), (7.10), инвариантны в отношении систем координат. Действительно, $\text{rot } \vec{H}$ и $\text{rot } \vec{E}$ полностью определяются вектором плотности тока и производной по времени от вектора магнитной индукции в данной точке, которые, естественно, не зависят от выбора системы координат. Однако выражения для составляющих вихря некоторого вектора $\vec{A}$ получаются различными в разных системах координат. Если воспользоваться обобщенной ортогональной криволинейной системой координат $\{q_1, q_2, q_3\}$, то $\text{rot } \vec{A}$ ($\vec{A} \equiv [\vec{H}, \vec{E}]$) можно представить следующим образом:

$$\text{rot } \vec{A} = \text{rot}_{q_1} A_{q_1} \vec{e}_{q_1} + \text{rot}_{q_2} A_{q_2} \vec{e}_{q_2} + \text{rot}_{q_3} A_{q_3} \vec{e}_{q_3} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{q_1} & \vec{e}_{q_2} & \vec{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_{q_1} & A_{q_2} & A_{q_3} \end{vmatrix}, \quad (7.11)$$

где $\vec{e}_{q_i}$ ($i=1, 2, 3$) — единичные орты по осям $\{q_1, q_2, q_3\}$ соответственно; A_{q_i} ($i=1, 2, 3$) — составляющие вектора по соответствующим осям.

Из (7.11) следует:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} = & \left(\frac{\partial A_{q_1}}{\partial q_2} - \frac{\partial A_{q_2}}{\partial q_1} \right) \vec{e}_{q_1} + \left(\frac{\partial A_{q_3}}{\partial q_1} - \frac{\partial A_{q_1}}{\partial q_3} \right) \vec{e}_{q_2} + \left(\frac{\partial A_{q_2}}{\partial q_1} - \frac{\partial A_{q_1}}{\partial q_2} \right) \vec{e}_{q_3} + \\ & + \frac{1}{e_{q_1} e_{q_2}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (e_{q_2} A_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (e_{q_1} A_{q_3}) \right] \vec{e}_{q_3}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Используя (7.11), (7.12), в декартовых координатах ($q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$) $e_{q_1} = e_{q_2} = e_{q_3} = 1$ уравнения Максвелла (7.8), (7.10) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \delta_x, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \delta_y, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \delta_z; \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

7.2.3. Теорема Гаусса и постулат Максвелла в дифференциальной форме

Теорема Гаусса в применении к ЭП гласит: поток вектора напряженности ЭП сквозь замкнутую поверхность в однородной и изотропной среде равен отношению количества электричества, заключенного в объеме пространства, ограниченного этой поверхностью, к диэлектрической проницаемости ϵ среды:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{s} = q / \epsilon. \quad (7.14)$$

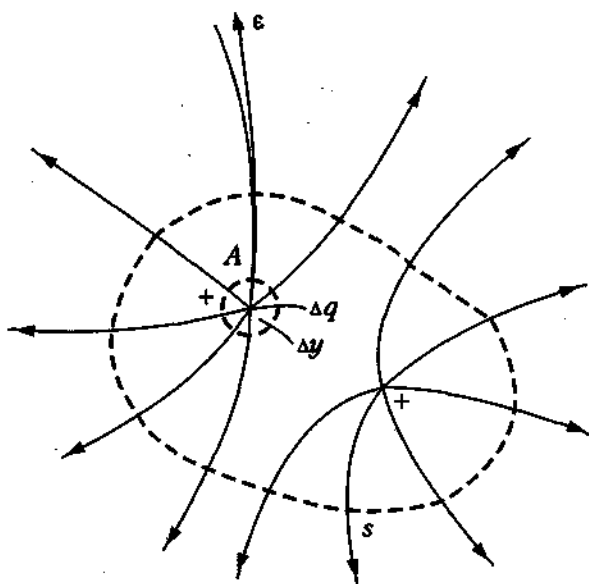


Рис. 7.4. Поток вектора электрической напряженности через замкнутую поверхность

Однако по величине этого интеграла еще нельзя судить о распределении электричества внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью. Для этого следует применить теорему Гаусса в дифференциальной форме. Допустим, что необходимо выяснить, находится ли электричество в малом объеме Δv , заключающем в себе точку A , и какова объемная плотность электричества в этой точке (рис. 7.4). Поток вектора $\vec{E}$ сквозь малую поверхность, ограничивающую объем Δv , равен деленному на ϵ малому заряду Δq , заключенному внутри этой поверхности:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{s} = \Delta q / \epsilon. \quad (7.15)$$

Разделим обе части уравнения (7.15) на Δv и найдем предел, к которому стремится отношение при $\Delta v \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\iint_S \vec{E} d\vec{s}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\epsilon \Delta v}. \quad (7.16)$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения (7.16), называется **расхождением**, или **дивергенцией**, вектора $\vec{E}$ и кратко обозначается $\text{div } \vec{E}$. В правой части (7.16) получается объемная плотность электрического заряда в данной точке пространства, деленная на ϵ . Таким образом, теорема Гаусса в дифференциальной форме принимает вид

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon. \quad (7.17)$$

Термин «расхождение» хорошо характеризует особенности поля в тех местах, где $\rho \neq 0$, и в тех местах, где $\rho = 0$. Положительный заряд можно рассматривать как «источник» линий напряженности ЭП (рис. 7.5, а). Отрицательный заряд — «сток» линий (рис. 7.5, б). При отсутствии заряда в некотором объеме ΔV ($\rho = 0$) линии напряженности не начинаются и не кончаются, а лишь проходят (рис. 7.5, в).

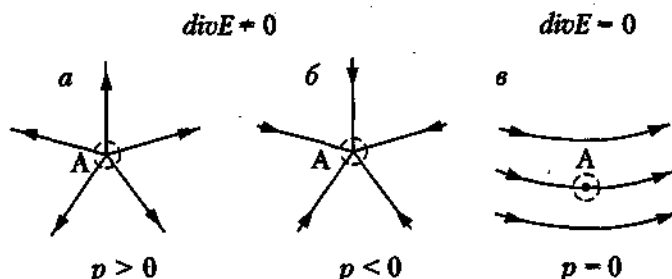


Рис. 7.5. Прохождение электрического поля через объем, не содержащий электрического заряда

В такой области ЭП называют **соленоидальным**. Расхождение вектора $\vec{E}$ во всех местах равно нулю: $\text{div } \vec{E} = 0$.

Значение расхождения вектора не зависит от выбора системы координат, и, соответственно, уравнение (7.17) инвариантно в отношении системы координат. Однако выражения расхождения некоторого вектора $\vec{A}$ через составляющие получаются различными в разных системах координат.

В обобщенной ортогональной криволинейной системе координат $\{q_1, q_2, q_3\}$:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (e_2 e_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (e_3 e_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (e_1 e_2 A_3) \right]. \quad (7.18)$$

В частности, для декартовой системы координат x, y, z :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (7.19)$$

Окончательно теорему Гаусса в дифференциальной форме можно записать в виде

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \rho / \epsilon, \quad (7.20)$$

где $\vec{\nabla}$ — набла, представляет собой символический дифференциальный векторный оператор Гамильтона.

В случае неоднородной и анизотропной среды, где диэлектрическая проницаемость является переменной величиной по разным координатным осям ($\epsilon = \text{var}$), необходимо ввести ϵ под знак интеграла, а вместо $\vec{E}$ использовать вектор электрического смещения (электрическую индукцию) $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, откуда вместо (7.20) получаем

$$\operatorname{div} \vec{D} = \vec{\nabla} \vec{D} = \rho. \quad (7.21)$$

Заметим попутно, что выражение $\operatorname{rot} \vec{A}$ может быть записано через знак $\vec{\nabla}$ в виде векторного произведения $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ или $[\vec{\nabla}, \vec{A}]$.

7.3. Принцип непрерывности магнитного потока и тока

Принцип непрерывности магнитного потока утверждает, что магнитные линии нигде не имеют ни начала, ни конца — они всюду непрерывны, то есть магнитный поток, проходящий сквозь любую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали, равен нулю (в литературе он трактуется как постулат Максвелла):

$$\iint_S \vec{B} d\vec{s} = 0. \quad (7.22)$$

В дифференциальной форме уравнение (7.22) примет вид

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (7.23)$$

Аналогично выглядит принцип непрерывности электрического тока. Полный ток — проводимости, переноса и смещения, проходящий сквозь любую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали, равен нулю:

$$\iint_S \vec{\delta} d\vec{s} = 0, \quad (7.24)$$

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0. \quad (7.25)$$

Выражения (7.23) и (7.25) справедливы во всех точках пространства.

7.4. Теоремы Остроградского и Стокса

Теоремы Остроградского и Стокса имеют чисто геометрический смысл и справедливы для произвольного вектора $\vec{A}$.

Теорема Остроградского. Для любого вектора $\vec{A}$, непрерывного вместе со своими первыми производными в области V и на поверхности S :

$$\iint_S \vec{A} d\vec{s} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dv. \quad (7.26)$$

Уравнение (7.26) является формулировкой теоремы Остроградского и имеет геометрический смысл преобразования объемного тройного интеграла в поверхностный. Для напряженности $\vec{E}$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dv, \quad (7.27)$$

что следует из ранее приведенных уравнений.

Теорема Стокса. Для любого вектора $\vec{A}$, непрерывного вместе со своими первыми производными на поверхности S и на контуре l :

$$\oint_l \vec{A} d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{s}. \quad (7.28)$$

Для напряженности $\vec{H}$:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{s}, \quad (7.29)$$

что также следует из ранее приведенных уравнений.

Уравнения (7.28), (7.29) имеют смысл преобразования поверхностного интеграла в криволинейный интеграл по контуру.

Приведенные теоремы важны при рассмотрении характеристик поля на сопряженных поверхностях, отделяющих одну область от другой; при выводе граничных условий.

7.5. Полная система уравнений Максвелла

Векторные уравнения (7.8), (7.10)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

дополняются двумя скалярными соотношениями (7.21), (7.23):

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Соотношение (7.21) можно использовать для определения плотности электрического заряда ρ , а (7.23) означает, что в природе не существует свободных магнитных зарядов. Силовые линии вектора $\vec{B}$ замкнуты.

Здесь представлена полная система уравнений ЭМП, позволяющая определить характерные векторы поля — $\vec{B}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{\delta}$. Плотность тока $\vec{\delta}$, как отмечалось раньше (7.3), может быть выражена через три составляющие:

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho \vec{v}.$$

При этом надо иметь в виду, что по самому смыслу первой и третьей составляющих они не могут иметь места в одной и той же точке пространства одновременно. Две первые составляющие могут иметь место одновременно в полупроводящей среде. Однако в хорошо проводящих веществах всегда можно пренебречь второй слагаемой по сравнению с первой и в изолирующих веществах обычно пренебречь первой слагаемой по сравнению со второй.

При формулировке задачи о распространении ЭМП в бесконечной среде система только что рассмотренных уравнений должна быть дополнена условиями в начале системы координат и в бесконечности. При этом следует принять во внимание, что мощности источников ЭМП в начале координат ограничены, следовательно, ограничены электрические и магнитные напряженности и их производные. В бесконечности — электрические и магнитные напряженности и их производные стремятся к нулю.

7.6. Преобразование уравнений Максвелла

Для того чтобы привести уравнения Максвелла к виду, удобному для нахождения напряженностей $\vec{E}$, $\vec{H}$, необходимо, считая, что плотность тока

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{током переноса пренебрегаем}), \quad \text{преобразовать уравнение (7.8)}$$

путем дифференцирования (взяв от него rot):

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{rot } \vec{\delta} = \text{rot} \left(\gamma \vec{E} + \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (7.30)$$

Учитывая уравнение (7.10) и известное преобразование векторной алгебры (см. приложение 2):

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \quad \vec{A} = \vec{H}, \vec{E},$$

где Δ — Лапласиан, получим

$$\text{rot rot } \vec{H} = -\gamma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (7.31)$$

Аналогичное уравнение можно получить и для напряженности $\vec{E}$:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\gamma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (7.32)$$

Если учесть, что $\text{div } \vec{H} = 0$ всегда, а $\text{div } \vec{E} \equiv 0$ — в областях, где отсутствуют заряды (это соответствует условиям распространения ЭМП в непроводящей среде), уравнения (7.31), (7.32) преобразуются к виду

$$\Delta \vec{H} + \gamma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (7.33)$$

$$\Delta \vec{E} + \gamma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (7.34)$$

Уравнения (7.33) и (7.34) называются **волновыми уравнениями** и позволяют определить шесть неизвестных: три составляющие магнитной напряженности и три составляющие электрической напряженности.

7.7. Потенциалы ЭМП

7.7.1. Векторный и скалярный потенциалы ЭМП

В дальнейшем будем рассматривать гармонические во времени колебания, имея в виду, что негармонические колебания могут быть изучены путем разложения в ряд, или интеграл, Фурье по гармоническим составляющим.

Принимая во внимание, что вектор магнитной напряженности $\vec{H}$ является соленоидальным ($\text{div } \vec{H} = 0$), можно ввести вектор $\vec{A}$ и функцию φ в виде

$$\vec{H} = (1/\mu) \text{rot } \vec{A}, \quad (7.35)$$

$$\vec{E} = j\omega \vec{A} - \text{grad } \varphi. \quad (7.36)$$

В (7.35)–(7.36) вектор $\vec{A}$ называется **векторным потенциалом**, φ — **скалярным потенциалом** ЭМП.

Заметим, что потенциалы $\vec{A}$, φ , задающие поле $(\vec{H}, \vec{E})$, определяются неоднозначно, с точностью до произвольной функции F :

$$\vec{A}_1 = \vec{A} + \text{grad } F, \quad \varphi_1 = \varphi + j\omega F. \quad (7.37)$$

Введем дополнительное условие, связывающее потенциалы $\vec{A}$, φ , которое называется **условием Лоренца**:

$$\text{div } \vec{A} - (jk^2/\omega)\varphi = 0, \quad (7.38)$$

где k — волновое число ($k = \sqrt{\omega\gamma\mu}$).

Выбирая функцию F из уравнения

$$\Delta F + k^2 F = (jk^2/\omega)\varphi - \text{div } \vec{A}, \quad (7.39)$$

можно показать, что потенциалы (7.35), (7.36) удовлетворяют условию (7.38).

Из условия Лоренца (7.38) следует, что потенциалы $\vec{A}$ и φ удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0, \quad (7.40)$$

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0. \quad (7.41)$$

Таким образом, любое ЭМП представимо через векторный и скалярный потенциалы, которые удовлетворяют уравнениям (7.35), (7.36) и условию (7.38).

Можно показать обратное: если потенциалы $\vec{A}$ и φ удовлетворяют уравнениям (7.35), (7.36) и условию (7.38), то поле $(\vec{H}, \vec{E})$ является ЭМП, т. е. удовлетворяет системе уравнений Максвелла (7.8), (7.10).

В результате при помощи векторного поля $\vec{A}$ и скалярной функции φ отыскание шести скалярных составляющих векторов $(\vec{H}, \vec{E})$ сводится к нахождению четырех скалярных величин — функции φ и трех составляющих вектора $\vec{A}$.

Аналогично, используя соленоидальность вектора электрической напряженности ($\text{div } \vec{E} = 0$), можно представить поле $(\vec{H}, \vec{E})$ в виде

$$\vec{H} = -j\omega\vec{A}^* - \text{grad } \varphi, \quad (7.42)$$

$$\vec{E} = (1/\epsilon') \text{rot } \vec{A}^*. \quad (7.43)$$

При условии $\text{div } \vec{A}^* + (jk^2/\omega)\varphi^* = 0$ потенциалы $\vec{A}^*, \varphi^*$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (7.40), (7.41).

7.7.2. Электрический и магнитный потенциалы Герца

Соотношение Лоренца (7.38) позволяет сократить число скалярных потенциалов, определяющих ЭМП, до трех, т. е. ЭМП может быть представлено через один вспомогательный вектор $\vec{\Pi}$. Положим

$$\vec{A} = -(jk^2/\omega)\vec{\Pi}. \quad (7.44)$$

Тогда условие (7.38) будет выполнено, если

$$\varphi = -\text{div } \vec{\Pi}. \quad (7.45)$$

Из (7.45) следует, что $\vec{\Pi}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi} = 0. \quad (7.46)$$

Можно показать, что функция φ (7.48) удовлетворяет уравнению (7.44) при условии (7.45). Подставляя (7.44), (7.45) в (7.8), (7.10), получаем представление ЭМП через вектор $\vec{\Pi}$:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -j\omega\epsilon' \text{rot } \vec{\Pi}, \\ \vec{E} &= \text{grad div } \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi} = \text{rot rot } \vec{\Pi}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Вектор $\vec{\Pi}$ называется *электрическим вектором Герца*. Аналогично, полагая

$$\vec{A}^* = -(jk^2/\omega)\vec{\Pi}^*, \quad \varphi^* = -\text{div } \vec{\Pi}^*,$$

где $\vec{\Pi}^*$ удовлетворяет уравнению (7.10).

Из (7.10) получаем представление ЭМП через вектор $\vec{\Pi}^*$:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \text{grad div } \vec{\Pi}^*, \\ \vec{E} &= j\omega\mu \text{rot } \vec{\Pi}^* + k^2 \vec{\Pi}^* = \text{rot rot } \vec{\Pi}^*. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Вектор $\vec{\Pi}^*$ называется *магнитным вектором Герца*. В дальнейшем при рассмотрении распространения ЭМП в многослойных средах часто будет использоваться вектор Пойнтинга $\vec{P}$, имеющий размерность удельной мощности. Его не следует путать с векторами Герца — $\vec{\Pi}$, $\vec{\Pi}^*$, которые отмечены несколько иным написанием.

7.8. Электромагнитное поле в низкочастотном приближении

При рассмотрении задач по расчету ЭМП в многосвязных областях наличие параметра малости $\alpha = kb$, где b — диаметр тела, позволяет использовать прием, основанный на близости такой задачи к задачам магнитостатики и электростатики. Допустим, что малое тело или оболочка малой толщины помещены в ЭМП. И пусть линейный размер тела b мал по сравнению с длиной волны: $kb \ll 1$, т. е. $b \ll \lambda$, где $\lambda = (2\pi/k)$ — длина волны. Так как волновой характер поля проявляется в масштабах длины волны, то в масштабах диаметра изучаемого тела поле является слабо меняющимся и может рассматриваться как электростатическое или магнитостатическое. Строго математически этот качественный переход осуществляется из уравнений Максвелла. Умножая уравнения (7.1), (7.2) на соответствующие постоянные, получим

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{rot} \vec{E} &= j\alpha \vec{H}, \quad C_1 = b(\epsilon'/\mu)^{0.5}, \\ C_2 \operatorname{rot} \vec{H} &= -j\alpha \vec{E}, \quad C_2 = b(\mu/\epsilon')^{0.5}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Раскладывая поля по малому параметру α :

$$\vec{E} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \vec{E}_k, \quad \vec{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \vec{H}_k,$$

после подстановки в (7.49) получаем

$$\begin{aligned} C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \operatorname{rot} \vec{E}_k &= j \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} \vec{H}_k, \\ C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \operatorname{rot} \vec{H}_k &= -j \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} \vec{E}_k. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Пренебрегая величинами порядка малости α , записываем уравнения Максвелла в низкочастотном приближении:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}_0 = 0. \quad (7.51)$$

На основании (7.51) поля $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ могут быть представлены через электростатический потенциал u и магнитостатический потенциал v в виде

$$\vec{E}_0 = -\operatorname{grad} u, \quad \vec{H}_0 = -\operatorname{grad} v.$$

В соответствии с условиями (7.51): $\operatorname{div} \vec{E}_0 = 0$, $\operatorname{div} \vec{H}_0 = 0$ оба потенциала удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \Phi \in [u, v]. \quad (7.52)$$

В случаях, когда величиной kb нельзя пренебречь из-за соизмеримости геометрических размеров системы и длины волны ЭМП, необходимо при решении дифракционных задач использовать полные волновые уравнения.

Поскольку в дальнейшем при решении задач низкочастотного ЭМП будем пользоваться уравнениями Лапласа (7.52) для скалярных потенциалов, граничные условия на оболочках разного типа также необходимо преобразовать в граничные условия для потенциалов.

Более подробно о скалярных и векторных потенциалах ЭМП можно прочитать в [7.1], [7.2].

7.9. Уравнения математической физики, описывающие ЭМП

Как следует из разделов 7.4–7.7, ЭМП можно описать уравнениями математической физики. Самый общий вид нестационарного ЭМП может быть представлен волновыми уравнениями (7.33), (7.34):

$$\Delta \vec{H} + \gamma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \vec{E} + \gamma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Если ЭМП можно рассматривать как квазистатическое и использовать при рассмотрении символический метод, уравнения Максвелла могут быть приведены к уравнениям Гельмгольца:

для напряженностей ЭМП $\vec{F} \in [\vec{E}, \vec{H}]$

$$\Delta \vec{F} + k^2 \vec{F} = 0,$$

для векторного $\vec{F}$ и скалярного Φ потенциалов

$$\Delta \vec{F} + k^2 \vec{F} = 0,$$

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

где $\vec{F} \in [\vec{A}, \vec{A}^*]$ — соответственно векторный магнитный и векторный электрический потенциалы, $\Phi \in [\Phi, \Phi^*]$ — соответственно скалярный электрический и скалярный магнитный потенциалы;

для потенциалов Герца

$$\Delta \vec{F} + k^2 \vec{F} = 0,$$

где $\vec{F} \in [\vec{\Pi}, \vec{\Pi}^*]$ — соответственно магнитный и электрический потенциалы Герца.

Для низкочастотных квазистатических полей уравнения Максвелла приводятся к уравнениям Лапласа или Пуассона:

для скалярных потенциалов

$$\Delta \Phi = 0,$$

где $\Phi \in [\psi, \psi]$ — соответственно магнитный и электрический скалярные потенциалы;

для векторного потенциала

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j}.$$

Для статических полей уравнения Максвелла также приводятся к уравнениям Лапласа или Пуассона.

Контрольные вопросы к главе 7

- 7.1. Что представляет собой ЭМП?
- 7.2. Какими величинами можно оценить качественные и количественные характеристики ЭМП?
- 7.3. Какие уравнения положены в основу модели ЭМП?
- 7.4. Какие поля можно отнести к статическим, квазистатическим и переменным?
- 7.5. Какими уравнениями математической физики можно описать статические ЭП, МП?
- 7.6. Какими уравнениями математической физики можно описать квазистатические ЭП, МП?
- 7.7. Какими уравнениями математической физики можно описать переменные ЭМП?
- 7.8. Каким способом можно уменьшить размерность уравнений, описывающих ЭМП?
- 7.9. Объясните физический смысл скалярного и векторного магнитных потенциалов.
- 7.10. Каким образом определяется векторный магнитный потенциал и как он вводится?
- 7.11. Что представляет собой скалярный электрический потенциал и как он вводится?
- 7.12. Объясните физический смысл теоремы Гаусса.
- 7.13. Объясните физический смысл теоремы Остроградского.

Библиографический список к главе 7

- 7.1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М.: Высш. школа, 1978. — 212 с.
- 7.2. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. — М.: ИЛ, 1961. — 712 с.
- 7.3. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля. — М.: Энергия, 1968. — 487 с.

- 7.4. *Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С.* Теоретические основы электротехники. — М.: Высш. школа, 1972. — 447 с.
- 7.5. *Нейман Л. Р., Демирчян К. С.* Теоретические основы электротехники. Т. 2. Ч. 4: Теория электромагнитного поля. — Л.: Энергия, 1967. — 234 с.
- 7.6. *Нетушил А. В., Поливанов К. М.* Основы электротехники. Ч. 3: Теория электромагнитного поля. — М., Л.: ГЭИ, 1956. — 191 с.
- 7.7. *Никольский В. В.* Теория электромагнитного поля. — М.: Высш. школа, 1964. — 384 с.
- 7.8. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. — М.: Мир, 1964. — 773 с.

Глава 8

Частные модели электромагнитного поля

8.1. Модели статических электромагнитных полей

8.1.1. Общие виды статических моделей и полей

Ранее была рассмотрена полная модель ЭМП. Чаще приходится встречаться с частными моделями ЭМП. Из них можно выделить статические модели. Эти модели поля соответствуют условиям, когда отсутствуют изменения во времени и нет электрических токов, то есть

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} = 0. \quad (8.1)$$

В этом случае основные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

В уравнениях (8.2) отсутствует связь между электрическими и магнитными величинами. В соответствии с этим можно отдельно рассматривать модель электростатического поля (ЭСП):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (8.3)$$

и модель магнитостатического поля (МСП)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (8.4)$$

Из уравнений (8.3), (8.4) следует, что ЭСП и МСП могут существовать совершенно независимо друг от друга.

8.1.2. Электростатическое поле

ЭСП образуется системой неподвижных относительно наблюдателя заряженных тел при отсутствии электрических токов. Если в системе нет намагниченных тел, то МП отсутствует. Следовательно, всюду

$$\vec{\delta} = 0, \vec{B} = 0, \vec{H} = 0.$$

Из системы уравнений ЭМП остается совокупность уравнений (8.3):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

Условие $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ свидетельствует, что ЭСП имеет безвихревой характер. Согласно теореме Стокса (7.28), для любого замкнутого контура имеем

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = \iint_s \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{s} = 0.$$

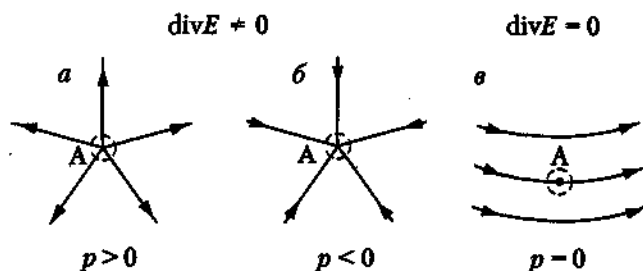


Рис. 8.1. Потенциал ЭСП в точке A

Таким образом, условие $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ выражает важное положение: в ЭСП линейный интеграл вектора $\vec{E}$ вдоль любого замкнутого контура равен нулю. Соответственно в ЭСП линейный интеграл вектора $\vec{E}$, взятый от точки A до точки B, не зависит от выбора пути интегрирования и полностью определяется в заданном поле положением точек A и B. Это обстоятельство дает возможность ввести понятие о потенциале ЭСП. Потенциал ЭСП в точке A определяется в виде (рис. 8.1)

$$\varphi_A = \int_A^P \vec{E} d\vec{l},$$

потенциал в точке P равен нулю. Линейный интеграл вектора $\vec{E}$ вдоль некоторого пути от точки A до точки B есть разность потенциалов φ^P в точках A и B:

$$\varphi = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_B.$$

Расчет потенциала φ может быть выполнен по уравнению Пуассона

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon, \quad (8.5)$$

использовав зависимости (9.3) в виде $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$, $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

В точках незаряженной области ($\rho = 0$) потенциал ϕ подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (8.6)$$

Аналогичные уравнения второго порядка можно получить и для вектора $\vec{E}$, используя известное тождество векторного анализа (см. приложение 3): $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$.

Используя зависимости (8.5), получаем уравнение

$$\nabla^2 \vec{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (8.7)$$

В точках, где $\rho = 0$,

$$\nabla^2 \vec{E} = 0. \quad (8.8)$$

8.1.3. Магнитостатическое поле

Если рассматривать области, не содержащие тока ($\vec{j} = 0$), то систему уравнений для магнитостатики можно записать в виде (8.4)

$$\text{rot } \vec{H} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Первое из дифференциальных уравнений позволяет ввести

$$\vec{H} = -\text{grad } \phi^M, \quad (8.9)$$

где ϕ^M — магнитостатический потенциал.

Из (8.9) следует, что в однородной среде ($\mu = \text{const}$) магнитостатический потенциал подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \phi^M = 0. \quad (8.10)$$

Как следует из уравнений (8.9) и (8.10), задачи магнитостатики и электростатики описываются идентично. А значит, решения магнитостатических задач могут быть получены из решения соответствующих электростатических задач простой заменой величин $\vec{E}$ на $\vec{H}$ и ϵ на μ .

8.2. Модели магнитного поля стационарных токов

8.2.1. Расчет поля с помощью векторного потенциала

Если отвлечься от временных изменений любого вида, т. е. в уравнениях Максвелла (7.8) и (7.10) считать, что $\partial / \partial t = 0$, но учитывать МП постоянных во

времени токов, получим основные уравнения электродинамики стационарных токов:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}, \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (8.11)$$

В этом случае уже существует связь между электрическими и магнитными величинами, выражаемая уравнениями

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}. \quad (8.12)$$

Математически задача состоит в определении вихревого поля без источников по его вихрям. Уравнение $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ дает возможность выразить $\vec{B}$ через векторный потенциал (8.38):

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Вектор $\vec{H}$ также принято определять через векторный потенциал. Но более логично считать, что векторным потенциалом определяется именно вектор $\vec{B}$. Действительно, равенство $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ справедливо всегда, тогда как равенство $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ выполняется только в однородной среде.

Вектор $\vec{A}$ можно определить из уравнения $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$ после его преобразования:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \vec{\delta}. \quad (8.13)$$

Полагая $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, получим

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{\delta}. \quad (8.14)$$

Для конечной области, ограниченной поверхностью a , имеем

$$\vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\Delta \vec{A}}{r} dv + \frac{1}{4\pi} \iint_a \frac{\partial \vec{A}}{\partial n} \frac{1}{r} da - \frac{1}{4\pi} \iint_a \vec{A} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} da.$$

Распространяя интегрирование на всю область, в которой $\vec{\delta} \neq 0$, получим

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{\delta}}{r} dv. \quad (8.15)$$

С помощью векторного потенциала $\vec{A}$ может быть рассчитан магнитный поток, сцепленный с замкнутым контуром, ограничивающим поверхность a :

$$\Phi = \iint_a \vec{B} d\vec{a} = \iint_a \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{a}.$$

Но по теореме Стокса (7.28)

$$\iint_a \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{a} = \oint_L \vec{A} d\vec{l}$$

криволинейный интеграл векторного потенциала по замкнутому контуру равен магнитному потоку, сцепленному с этим контуром.

8.2.2. Примеры использования векторного потенциала

Как было показано, векторный потенциал $\vec{A}$ играет принципиально ту же роль для МП (и других вихревых полей), как скалярный потенциал $\varphi^э$ — для ЭСП.

На практике, однако, векторным потенциалом пользуются гораздо реже. Это объясняется тем, что для измерения разности электрических потенциалов существуют простые измерительные приборы (для измерения векторного потенциала приборов не существует), а также и тем, что эта разность потенциалов непосредственно участвует в выражении мощности, которая играет большую практическую роль. Кроме того, в практических задачах непосредственно виден смысл граничных значений $\varphi^э$, которые задаются очень просто, в то время как в МП существующие для $\vec{A}$ граничные условия лишены такой наглядности и должны быть определены через граничные условия для $\vec{H}$ и $\vec{B}$.

Сравнивая уравнения, связывающие $\vec{B}$ и $\vec{\delta}$, с уравнениями, связывающими $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{\delta}, \quad \text{rot} \vec{A} = \vec{B}, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{div} \vec{A} = 0,$$

приходим к следующему заключению: если распределение магнитной индукции при данном распределении тока заменить фиктивным распределением плотности тока $\vec{\delta}_f$, то фиктивная магнитная индукция $\vec{B}_f$, соответствующая такому распределению тока, совпадает с искомым векторным потенциалом (рис. 8.2).

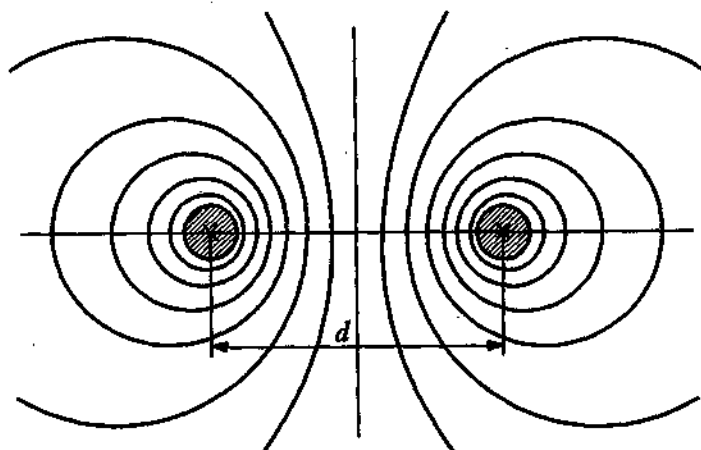


Рис. 8.2. Распределение МП около кругового кольца с током

Смысл приведенного вывода заключается в том, что он позволяет найти качественную картину, которая может быть полезна для отыскания количественных результатов.

Пример 8.1. Рассмотрим поле бесконечно длинного прямолинейного провода. Все элементы длинного прямого провода в данном случае направлены одинаково,

например по оси $+z$ (рис. 8.3), поэтому и вектор $\vec{A}$ может иметь только z -составляющую:

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L}^L \frac{dl}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L}^L \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (8.16)$$

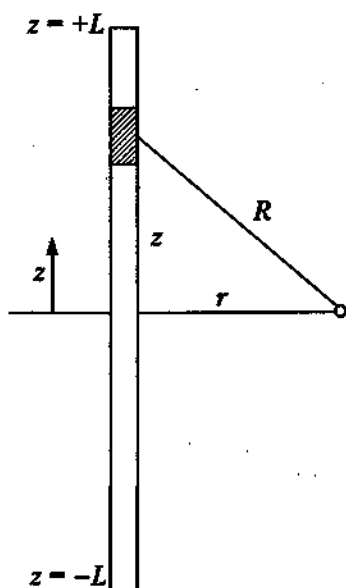


Рис. 8.3. МП прямолинейного провода

Если L безгранично велико, интеграл расходится так же, как потенциал бесконечно длинного провода с линейным зарядом. Однако единственная составляющая напряженности МП

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{Ir}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{1.5}} \quad (8.17)$$

имеет уже конечное значение при $L \rightarrow \infty$. Значение этого интеграла приводится к выражению

$$H_\phi = \frac{Ir}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{1.5}} = \frac{I}{2\pi r}. \quad (8.18)$$

Пример 8.2. Требуется рассчитать МП двух параллельных шин с постоянными токами I и $-I$. Сечение шин ah , расстояние между ними b (рис. 8.4). Магнитная проницаемость шин и окружающей среды $\mu = \text{const}$.

МП в шинах описывается двумерным уравнением Пуассона для векторного потенциала A_z (в декартовых координатах x, y, z)

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu \delta_z. \quad (8.19)$$

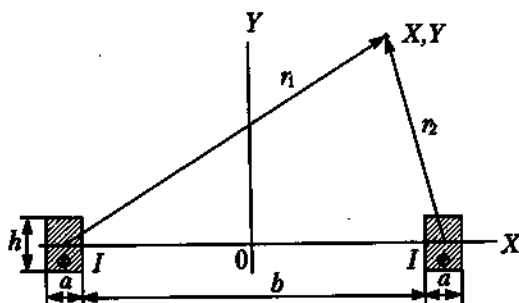


Рис. 8.4. МП двухпроводной линии из проводов прямоугольного сечения

Вне шин правая часть уравнения (8.24) равна нулю.

Общее решение уравнения (8.24) можно записать в виде

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\delta_z}{r} dv,$$

учитывая равенство нулю алгебраической суммы токов линии.

Ток в каждой шине распределен по сечению равномерно, поэтому плотность тока в обеих шинах $\delta_z = I / ah$.

В декартовых координатах x, y, z A_z запишется в виде

$$A_z = \frac{\mu \delta_z}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-0.5h}^{+0.5h} dy \int_{-a-0.5b}^{-0.5b} \frac{dx}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} - \\ - \frac{\mu \delta_z}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-0.5h}^{+0.5h} dy \int_{0.5b}^{a+0.5b} \frac{dx}{\sqrt{r_2^2 + z^2}}$$

или

$$A_z = \frac{\mu I}{2\pi ah} \int_0^{\infty} dz \int_{-0.5h}^{+0.5h} dy \left(\int_{-a-0.5b}^{-0.5b} \frac{dx}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} - \int_{0.5b}^{a+0.5b} \frac{dx}{\sqrt{r_2^2 + z^2}} \right). \quad (8.20)$$

Здесь

$$r_1 = \sqrt{(X+x)^2 + (Y+y)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}$$

являются расстояниями от точки $(X, Y, 0)$, в которой определяется векторный потенциал $A_z(X, Y)$, до точек $(x, y, 0)$ сечения соответственно первой и второй шины. Интегрирование производится по всему объему, занятому током: по x и y — в пределах сечения шин, по z — в пределах длины шин.

Интегрирование выражения (8.20) для расчета $A_z(X, Y)$ в шинах или вблизи от них затруднительно. Если же рассматривать МП на расстояниях, значительно

больших, чем поперечные размеры шин, r_1 и r_2 можно считать расстояниями до центров шин, тогда интегрирование по x и y дает соответственно a и h . Тогда

$$A_z = \frac{\mu I}{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + z^2}} \right) dz = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

или

$$A_z(X, Y) = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(X + 0,5a + 0,5b)^2 + Y^2}}{\sqrt{(X - 0,5a - 0,5b)^2 + Y^2}}. \quad (8.21)$$

Из выражения (8.21) посредством дифференцирования могут быть определены слагаемые напряженности поля:

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (8.22)$$

Известно, что уравнение линий $\vec{H}$ имеет вид

$$\frac{dx}{dy} = \frac{H_x}{H_y}, \quad -H_y dx + H_x dy = 0. \quad (8.23)$$

Подставляя H_x и H_y из (8.22), получим

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} dx + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy = dA_z = 0. \quad (8.24)$$

Следовательно, линии постоянного векторного потенциала $dA_z = 0$ или $A_z = \text{const}$ совпадают с линиями $\vec{H}$. Эти линии, как видно из (8.24), представляют собой окружности, аналогичные окружностям $\varphi^3 = \text{const}$ в поле двух противоположно заряженных параллельных проводов. Потенциал таких проводов имеет вид

$$\varphi^3 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (8.25)$$

Из сказанного следует, что линии $\vec{H}$ и $\vec{E}$ ортогональны. Действительно, линии $\vec{E}$ ортогональны линиям $\varphi^3 = \text{const}$, а линии $\varphi^3 = \text{const}$, как было показано, совпадают с линиями $\vec{A} = \text{const}$, а значит, и с линиями $\vec{H}$.

8.3. Модели квазистатических электромагнитных полей

Пренебрегая ЭМП, обусловленным токами смещения $(\partial \vec{D} / \partial t)$, но учитывая изменение электрической и магнитной напряженностей, получаем основные уравнения электродинамики почти статических, или квазистатических, ЭМП:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{\delta}, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{\delta} = \gamma \vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \operatorname{div} \vec{B} = 0.\end{aligned}\quad (8.26)$$

В уравнениях (8.26) существует уже довольно тесная связь между электрическими и магнитными величинами. При использовании символического метода представления гармонических (в данном случае синусоидальных) величин уравнения (8.26) сводятся к уравнениям Гельмгольца (7.43–744) для напряженностей $\vec{E}$, $\vec{H}$.

8.4. Модель нестационарных электромагнитных полей

В общем случае учитываются все временные изменения, приводящие к существованию нестационарного ЭМП:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{\delta} = \gamma \vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \vec{D} = \epsilon \vec{E}.\end{aligned}\quad (8.27)$$

Уравнения (8.27) приводятся к уравнениям вида (7.36) и (7.37), которые называются волновыми уравнениями. Они позволяют определить шесть неизвестных: трех составляющих магнитной напряженности $\vec{H}$ и трех составляющих электрической напряженности $\vec{E}$.

Квазистатические модели ЭМП отличаются от моделей нестационарных ЭМП наличием временного параметра, величина которого зависит не только от скорости изменения процесса во времени, но и от соотношения длины волны ЭМП и размеров тел, участвующих во взаимодействии.

Часто одна и та же задача может быть описана в зависимости от потребностей расчета как моделью квазистатического ЭМП, так и моделью нестационарного ЭМП, т. е. на основе общих волновых уравнений.

Контрольные вопросы к главе 8

- 8.1. Что понимается под статическими моделями ЭМП?
- 8.2. Напишите уравнения, составляющие модель ЭСП.
- 8.3. Напишите уравнения, составляющие модель МСП.
- 8.4. Какие поля относятся к квазистатическим?
- 8.5. Напишите уравнения, составляющие модель квазистатического ЭМП.
- 8.6. Какие из полей вызывают наибольшие трудности при расчетах и почему?
- 8.7. Как можно уменьшить трудоемкость расчетов?
- 8.8. Какие виды потенциалов вводятся при расчетах полей и почему?

- 8.9. Каким образом переходят от потенциалов к напряженностям ЭП и МП?
- 8.10. Всегда ли целесообразно прибегать к введению потенциалов поля?
- 8.11. Какой из потенциалов более информативен: скалярный или векторный?

Библиографический список к главе 8

- 8.1. *Аполлонский С. М.* Внешние электромагнитные поля электрооборудования и средства их снижения. — СПб.: Безопасность, 2001. — 616 с.
- 8.2. *Каплянский А.Е., Лысенко А.П., Полотовский Л. С.* Теоретические основы электротехники. — М.: Высш. школа, 1972. — С. 425–427.
- 8.3. *Никольский В. В.* Теория электромагнитного поля. — М.: Высш. школа, 1964. — С. 30–35, 52–53, 95.
- 8.4. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М.: Высш. школа, 1978. — 212 с.
- 8.5. *Богословский А. С.* Магнитные поля и цепи постоянного тока. — Л.: ВВМИОЛУ, 1977. — 203 с.
- 8.6. *Богословский А. С.* Постоянные электрические поля. — Л.: ВВМИОЛУ, 1987. — 121 с.
- 8.7. *Говорков В. А.* Электрические и магнитные поля. — М.: Энергия, 1968. — 487 с.
- 8.8. *Нетушил А. В., Поливанов К. М.* Основы электротехники. Ч. 3: Теория электромагнитного поля. — М., Л.: ГЭИ, 1956. — 191 с.
- 8.9. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. — М.: МИР, 1964. — 773 с.

Глава 9

Методы расчета статических и квазистатических электромагнитных полей

9.1. Метод разделения переменных

Решение краевых задач на плоскости. На практике приходится встречаться с задачами, в которых используются электроды с поверхностью цилиндрической формы. При этом форма поперечного сечения может быть произвольной. На рис. 9.1, *а* показана схема расположения электродов в электронно-оптическом устройстве; электроды здесь представляют собой пластины, перпендикулярные плоскости чертежа, а отверстиями служат щели; на рис. 9.1, *б* изображено поперечное сечение триода, имеющего плоский катод, сетку, состоящую из длинных параллельных нитей, и плоский анод.

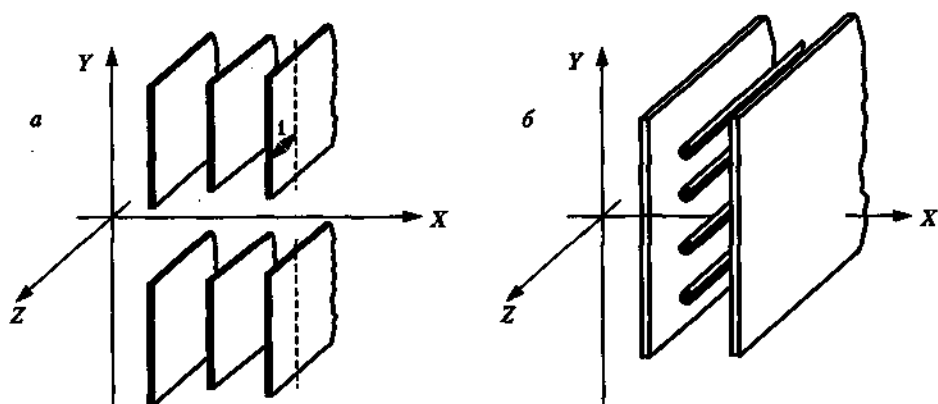


Рис. 9.1. К расчету ЭП системы электродов в электронно-оптическом устройстве

Практически можно получить достаточно хорошее приближение, полагая размеры электродов в направлении, перпендикулярном плоскости (x, y) , очень большими. В таком случае во всех плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, распределение потенциала и силовых линий одно и то же. В действительности, если края электродов удалены от рассматриваемой плоскости сечения, их

влияние сказывается незначительно и распределение потенциала практически не зависит от координаты z . При этом трехмерное уравнение Лапласа, описывающее ЭП в триоде, сводится к двумерному (для обозначения электрического потенциала используется здесь и в дальнейшем буква U , поскольку ϕ использована для обозначения угловой координаты):

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (9.1)$$

и электрический потенциал U представляется функцией только двух переменных x и y .

Применим для решения уравнения (9.1) метод разделения переменных. Для этого положим, что искомый электрический потенциал ϕ можно представить как произведение двух функций, из которых каждая зависит только от одной переменной, например? для системы координат x и y :

$$U(x, y) = X(x)Y(y). \quad (9.2)$$

Подставив это произведение в уравнение (9.2), получим

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0. \quad (9.3)$$

Если далее обе части полученного уравнения разделить на произведение XY , то получим

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2},$$

одна часть которого зависит только от переменной x , а другая — только от переменной y . Отсюда следует, что обе части должны быть постоянными и иметь одно и то же значение, например k^2 . Таким образом, исходное уравнение в частных производных распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y.$$

Решение этих уравнений известно [9.3, с. 363]:

$$X(x) = A \operatorname{sh} kx + B \operatorname{ch} kx, \quad Y(y) = C \sin ky + D \cos ky, \quad (9.4)$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

Значение так называемой постоянной разделения k может быть действительным, мнимым или комплексным, и вследствие этого характер обеих выбранных функций в действительности может быть обратным указанному. Общее уравнение Лапласа получится, если просуммировать все имеющиеся решения:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} kx + B_k \operatorname{ch} kx)(C_k \sin ky + D_k \cos ky). \quad (9.5)$$

Значения всех входящих в уравнение постоянных должны быть определены из граничных условий.

Уравнение Лапласа для плоскости можно представить также в полярных координатах r, φ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (9.6)$$

если полагать, что потенциал не зависит от координаты z . Это уравнение также может быть решено методом разделения переменных. Положим

$$U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \quad (9.7)$$

Подставив функцию (9.7) в уравнение Лапласа, получим

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0. \quad (9.8)$$

Аналогично предыдущему введем постоянную разделения k^2 , после чего получим

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = k^2, \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -k^2. \quad (9.9)$$

Решения этих двух дифференциальных уравнений уже известны: решения первого уравнения имеют вид $R = r^{-k}$ и $R = r^k$, что можно доказать подстановкой в исходное уравнение.

Общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах, удовлетворяющее произвольным граничным условиям, имеет вид

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k r^k + \frac{B_k}{r^k} \right) (C_k \sin k\varphi + D_k \cos k\varphi). \quad (9.10)$$

Расчет плоско-меридианных полей. Если электроды имеют осевую симметрию, то целесообразно применять круговые цилиндрические координаты r, φ, z . В этом случае поле должно иметь осевую симметрию, т. е. его потенциал не зависит от угла φ . Уравнение Лапласа при этом значительно упрощается. Как известно, в координатах r, φ, z

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (9.11)$$

Значение потенциала не зависит от угла φ , если ось симметрии совпадает с осью z . При этом уравнение Лапласа для электрического потенциала приобретает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (9.12)$$

В уравнении (9.12) потенциал U зависит только от координат r, z , то есть

$$U = U(r, z). \quad (9.13)$$

Уравнение (9.12) целесообразно решать методом разделения переменных в виде, положив

$$U(r, z) = R(r)Z(z). \quad (9.14)$$

Подставляя U в виде (9.14) в уравнение (9.12):

$$Z \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} Z \frac{dR}{dr} + R \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

и деля на $U = RZ$, получаем уравнение

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}, \quad (9.15)$$

левая часть которого зависит только от координаты r , а правая — только от координаты z . Равенство может выполняться только в том случае, когда обе части уравнения равны одной и той же величине k^2 , то есть

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 \text{ и } \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} = -k^2. \quad (9.16)$$

Итак, для определения неизвестных функций Z и R мы получили два обыкновенных дифференциальных уравнения. Решение первого имеет вид [9.3, с. 363]

$$Z = Ae^{kz} + Be^{-kz}. \quad (9.17)$$

Если k — действительное число, этому выражению целесообразно придать вид

$$Z = A \operatorname{ch} kz + B \operatorname{sh} kz. \quad (9.18)$$

Если k — чисто мнимое число, т. е. $k^2 = -\chi^2$, где χ — действительное число, то

$$Z = A \cos \chi z + B \sin \chi z. \quad (9.19)$$

Следует добавить, что при любых значениях k общее решение может быть представлено в любой из этих трех форм. При этом, естественно, постоянные A и B получаются различными.

Дифференциальные уравнения, служащие для определения функций $R(r)$ и $Z(z)$, часто встречаются во многих задачах электротехники (например, в задачах экранирования). Уравнения типа $R(r)$ исследовались впервые Бесселем, поэтому они названы уравнениями Бесселя, а функции, служащие их решением, — **функциями Бесселя**. Частное решение приведенного здесь дифференциального уравнения $R(r)$ называется **функцией Бесселя нулевого порядка** и обозначается $J_0(kr)$, где kr — ее аргумент. Чтобы получить полное решение уравнения, необходимо найти еще одно решение, независимое от предыдущего. Это решение называется **функцией Неймана нулевого порядка**, имеет тот же аргумент kr и обозначается $N_0(kr)$. Отсюда общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид

$$R(r) = C J_0(kr) + D N_0(kr), \quad (9.20)$$

где C и D — произвольные постоянные.

Если k — чисто мнимое число, т. е. $k^2 = -\chi^2$, то $J_0(kr) = J_0(j\chi r)$. Эта функция вещественна.

Полное решение уравнения (9.12) имеет вид

$$U(z, r) = Z(z) R(r) = [A \operatorname{ch} kz + B \operatorname{sh} kz][C J_0(kr) + D N_0(kr)]. \quad (9.21)$$

Решение (9.21) содержит произвольную постоянную k . От ее выбора зависит, конечно, характер распределения потенциала. И в этом случае можно идти таким путем: придавая постоянной k произвольные значения, исследовать, какому виду эквипотенциальной поверхности соответствует полученное решение, и тем самым установить, для какой формы электродов оно применимо.

Уравнение Лапласа — линейное уравнение. Поэтому если найдены какие-то два решения, их сумма также удовлетворяет исходному уравнению. Если требуется найти общее решение уравнения для поля с осевой симметрией при заданных граничных условиях, то можно искать его в виде ряда

$$U(z, r) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{ch} kz + B_k \operatorname{sh} kz][C_k J_0(kr) + D_k N_0(kr)]. \quad (9.22)$$

Здесь $A_k, \dots, D_k$ определяются из граничных условий.

Значения k часто образуют ряд непрерывных, а не дискретных чисел. В таком случае решение представляется интегралом

$$U(z, r) = \int_k [A(k) \operatorname{ch} kz + B(k) \operatorname{sh} kz][C(k) J_0(kr) + D(k) N_0(kr)] dk \quad (9.23)$$

или в случае $k^2 = -\chi^2$ интегралом

$$U(z, r) = \int_{\chi} [A(\chi) \operatorname{ch} \chi z + B(\chi) \operatorname{sh} \chi z][C(\chi) J_0(j\chi r) + D(\chi) N_0(j\chi r)] d\chi. \quad (9.24)$$

9.2. Метод конформных отображений

Конформные отображения. Понятие конформного отображения относится к числу важнейших понятий математики. Возникшее из физических представлений, оно находит многочисленные приложения к различным техническим областям: гидро- и аэродинамике, теории упругости, теории фильтрации, теории теплового, магнитного, электрического полей и др. [9.4–9.6]. Отдельные задачи, связанные с конформными отображениями, решали Даламбер (J. L. D'Alembert, 1717–1783), Эйлер (L. Euler, 1707–1783) и Гаусс (K. F. Gauss, 1777–1855). Основываясь на их результатах, Риман (G. F. B. Riemann, 1826–1866) в своей диссертации «Основы общей теории функций комплексного переменного» (1851) систематизировал и развил теорию конформных отображений, исходя из физических представлений.

Инициатива широкого применения конформных отображений к конкретным практическим задачам и наиболее принципиальные результаты в этом направлении принадлежат русским ученым — Н. Е. Жуковскому, С. А. Чаплыгину, М. А. Лаврентьеву, М. В. Келдышу, Н. И. Мусхелишвили, Л. И. Седову и др.

Метод конформных отображений часто используется для расчета двумерных ЭП и МП в неаналитических областях, описываемых уравнением Лапласа. Он является практическим применением теории функций комплексного переменного. Конформное преобразование сводится к замене действительного поля, которое из-за сложности очертания его границ не поддается непосредственному расчету, другим полем, каждый бесконечно малый элемент площади которого подобен соответствующему ему бесконечно малому элементу заменяемого поля, но очертание границ имеет простую форму, для которой расчетные уравнения известны.

Подыскание функциональной зависимости, правильно отображающей замкнутое поле, является основной трудностью.

Рассмотрим плоскость [9.7, с. 224], в которой расположены линии поля и эквипотенциальные линии, как плоскость комплексного переменного $z = x + jy$ (рис. 9.2, а); вещественные величины откладываются по оси Ox , а мнимые — по оси Oy . Каждой точке на этой плоскости соответствует определенное комплексное число z , каждой линии — определенное уравнение, связывающее координаты ее точек. Например, точке a соответствует число $z = 1 + j$, а точке e — число $z = 2 + j3$, прямой линии $u = 0$, проведенной из начала координат под углом 45° , соответствует уравнение $x = y$ и т. д.

Рассмотрим теперь другую комплексную величину $w = u + jv$, вещественная и мнимая составляющие которой являются однозначными функциями x и y . Каждому значению $z = x + jy$, определяющему положение некоторой точки на плоскости z , соответствует определенная точка на плоскости w (рис. 9.2, б).

Рисунок 9.2 сделан для случая $w = z^2$. Развернув комплексные выражения величин w и z , имеем

$$u + jv = x^2 - y^2 + 2jxy,$$

откуда

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \quad (9.25)$$

Первое из уравнений (9.25) соответствует гиперболе при $u = 4$, второе из уравнений (9.25) соответствует гиперболе при $v = 16$.

Точке a на плоскости z , имеющей координаты $x = 1$; $y = 1$, соответствует точка a' на плоскости w , координаты которой по формулам (9.25) равны: $u = 0$; $v = 2$; точке b на плоскости z с координатами $x = 2$, $y = 1$ соответствует точка b' на плоскости w с координатами $u = 3$, $v = 4$ и т. д.

Квадрат $abed$ на плоскости z преобразовался в криволинейный четырехугольник $a'b'e'd'$ на плоскости w .

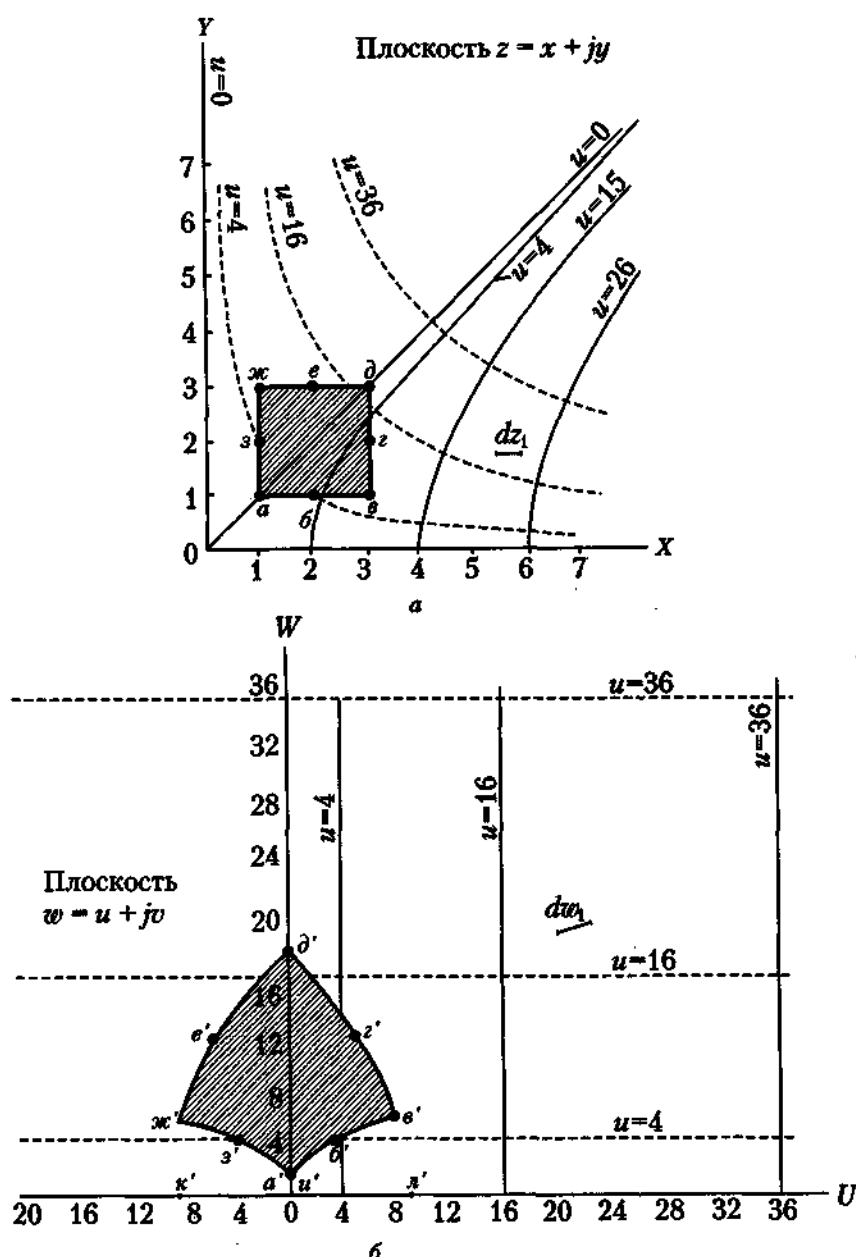


Рис. 9.2. К расчету электрического поля методом конформных отображений

Оценка изменений формы, размера и ориентации преобразуемого элементарного отрезка делается с помощью линейного коэффициента преобразования, равного производной dw/dz ,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = Me^{j\theta}, \quad (9.26)$$

или

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dy} \frac{dy}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial u}{\partial y} = Me^{j\theta},$$

где

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}, \quad (9.27)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}}. \quad (9.28)$$

Коэффициент преобразования является в общем случае комплексным числом. Преобразование малого отрезка dz при переносе его с плоскости z на плоскость w заключается в изменении его длины в M раз и в повороте против часовой стрелки на угол θ ; M и θ являются функциями координат преобразуемого малого отрезка. Однако коэффициент преобразования не зависит от ориентации преобразуемого отрезка на плоскости z .

Пусть в какой-либо точке на плоскости z пересекались под некоторым углом α два малых отрезка; после преобразования, т. е. переноса на плоскость w , каждый отрезок повернулся на одинаковый угол θ ; значит, угол α между ними сохранился. Линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ на плоскости w (рис. 9.2) повсюду пересекаются под прямым углом; следовательно, соответствующие им кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ на плоскости z также образуют ортогональную систему, т. е. касательные к кривым в точках их пересечения взаимно перпендикулярны.

Система таких кривых может представлять собой картину электрического или магнитного поля, поскольку линии напряженности поля (линии индукции) и эквипотенциальные линии всегда пересекаются под прямым углом.

Из выражений (9.26) вытекают так называемые уравнения Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9.29)$$

Функции u и v , удовлетворяющие этим уравнениям, называются *сопряженными*. Каждая из них подчиняется уравнению типа Лапласа для двухмерного поля. В этом легко убедиться, продифференцировав одно из уравнений (9.26) по x , а другое — по y и либо сложив результаты, либо вычтя один из другого. Любое из семейств кривых ($u = \text{const}$ или $v = \text{const}$) может изображать либо линии поля, либо эквипотенциальные линии.

Каждый малый элемент площади на плоскости z после переноса на плоскость w изменит свой размер и ориентацию, но сохранит очертание: квадрат останется квадратом, кружок — кружком. Фигуры же конечных размеров могут подвергаться большому искажению (см. рис. 9.2).

Примеры конформных отображений. Вместо непосредственного отыскания отображений, соответствующих поставленной физической задаче, можно сначала идти другим путем: рассмотреть, какие реальные задачи решаются посредством тех или иных изображений. В дальнейшем из множества полученных решений надо будет выбрать те, которые ближе всего подходят к поставленной задаче.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим функцию [9.6, с. 162]

$$w = z^2. \quad (9.30)$$

Раскрывая это выражение:

$$u + jv = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy, \quad (9.31)$$

находим, что

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \quad (9.32)$$

Следовательно, это преобразование переводит параллельные прямые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ плоскости w в гиперболы $x^2 - y^2 = \text{const}$ и $2xy = \text{const}$ в плоскости z . Так как производная во всех точках, кроме точки $z = 0$, не равна нулю и однозначна, отображение конформно, т. е. семейства этих гипербол ортогональны.

В качестве потенциальной функции выберем мнимую часть, т. е. будем считать, что потенциал выражается функцией

$$v = 2xy. \quad (9.33)$$

С помощью рассматриваемого преобразования можно решать все задачи, в которых направляющая цилиндрического электрода — гипербола, описываемая уравнением $2xy = v_0$. Можно считать, что прямая $v_0 = 0$ (т. е. ось u) соответствует границе первого квадранта в плоскости z (для которого $x \geq 0$, $y \geq 0$ при $v \geq 0$).

В этом случае область однородного поля в плоскости w , лежащая между электродами $v = 0$ и $v = v_0$, отображается на область, лежащую в первом квадранте плоскости z между координатными осями, на которых $v = 0$, и гиперболой $2xy = v_0$ (рис. 9.3).

Составляющие напряженности поля выражаются в виде

$$E_x = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \quad E_y = -\frac{\partial v}{\partial y} = -2x. \quad (9.34)$$

Модуль напряженности

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 = 4(x^2 + y^2). \quad (9.35)$$

Как видно из рис. 9.3, напряженность поля возрастает по мере удаления от начала координат и при больших значениях x вблизи оси x силовые линии поля становятся параллельными оси y ; аналогично при больших значениях y вблизи оси y они становятся параллельными оси x .

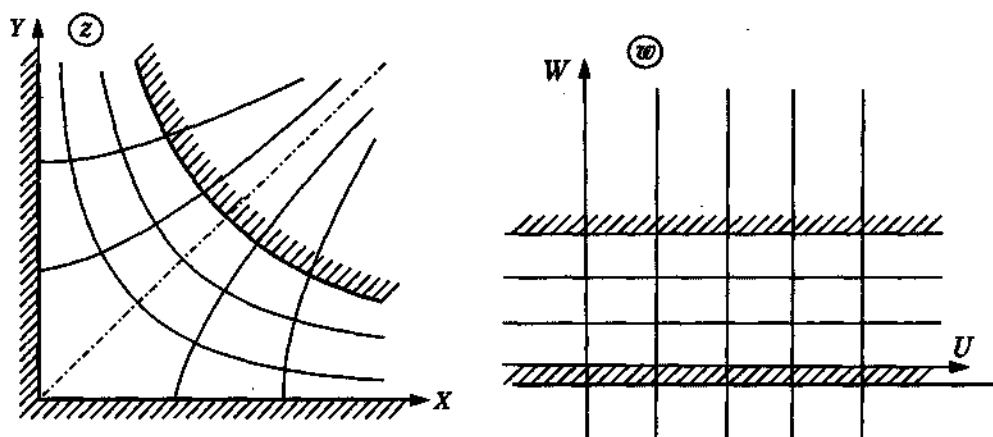


Рис. 9.3. К расчету ЭП в области однородного поля в плоскости w , лежащей между электродами $v = 0$ и $v = v_0$

Пример 2. Рассмотрим функцию [9.6, с.163]

$$w = \ln z, \text{ где } z = x + jy = Re^{j\varphi}. \quad (9.36)$$

В этом случае

$$u + jv = \ln z = \ln Re^{j\varphi} = \ln R + j\varphi, \quad (9.37)$$

то есть действительная и мнимая части функции определяются соответственно равенствами

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (9.38)$$

Выбрав в качестве потенциальной функции

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (9.39)$$

найдем уравнение эквипотенциальных линий ($u = \text{const}$):

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const} \text{ или } x^2 + y^2 = \text{const}, \quad (9.40)$$

то есть эти линии — концентрические окружности.

Рассматриваемая функция соответствует полю заряженного провода, имеющего форму длинного кругового цилиндра. Заряд, приходящийся на единицу длины такого провода, по уравнению (9.40) равен

$$q_0 = \epsilon_0(v_A - v_B) = \epsilon_0(0 - 2\pi) = -2\pi\epsilon_0. \quad (9.41)$$

Следовательно, заряду $-2\pi\epsilon_0$ соответствует функция

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (9.42)$$

Заряду в q раз большему и положительному по знаку соответствует функция

$$u = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r}. \quad (9.43)$$

Далее, так как $\ln 1 = 0$, потенциал в точке $r = 1$ равен нулю. Если потребовать, чтобы потенциал равнялся нулю на поверхности кругового цилиндра радиуса r_0 , получится следующее выражение потенциала:

$$u = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}, \quad (9.44)$$

которому соответствуют: поле кругового цилиндра конечного радиуса, поле заряженной электрической оси и поле коаксиальных цилиндров (рис. 9.4).

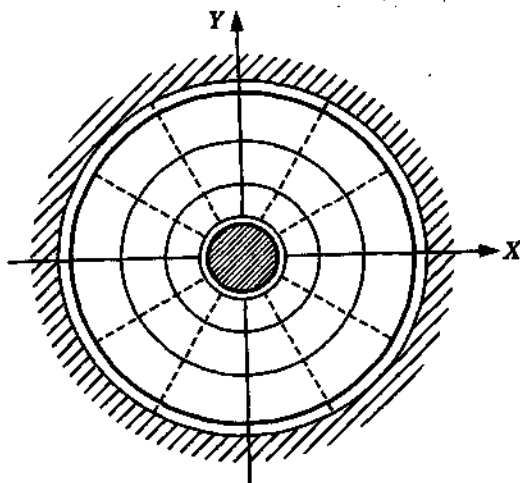


Рис. 9.4. К расчету поля кругового цилиндра конечного радиуса

Выберем теперь в качестве потенциальной функции мнимую часть w :

$$v = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (9.45)$$

Тогда, согласно рис. 9.5, а, этому соответствует потенциальное поле двух полуплоскостей, пересекающихся по линии $x = y = 0$, образующих между собой заданный угол и имеющих разные потенциалы. Следы эквипотенциальных поверхностей в данном случае — прямые (в пространстве — плоскости), выходящие из центра. Силовые линии образуют окружности. На рис. 9.5, б показано ЭП двух близлежащих полуплоскостей, находящихся под разными потенциалами (поле рассеяния плоского конденсатора).

На рис. 9.6 показано поле двух расположенных рядом полуплоскостей, имеющих разные потенциалы (одна из них служит геометрическим продолжением другой). Таким образом, преобразование $w = \ln z$ отображает прямые $v = 0$ и $v = \pi$ в плоскости w на рядом лежащие полубесконечные прямые плоскости z .

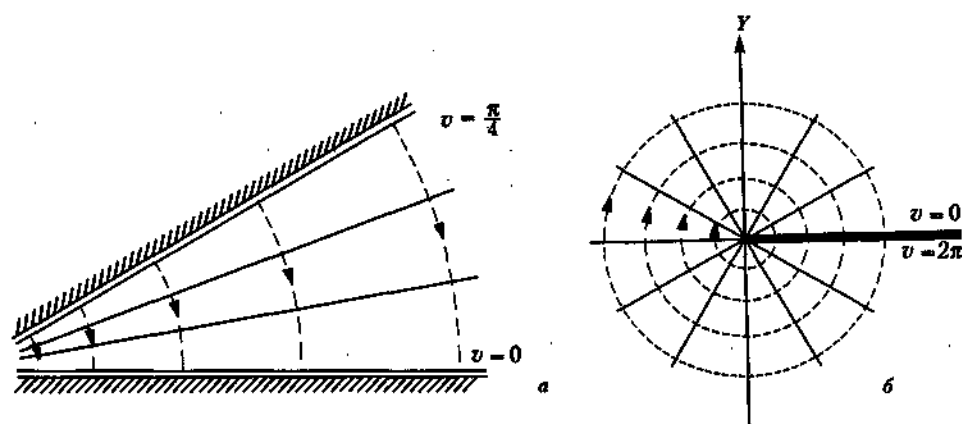


Рис. 9.5. К расчету ЭП двух близлежащих полуплоскостей, находящихся под разными потенциалами

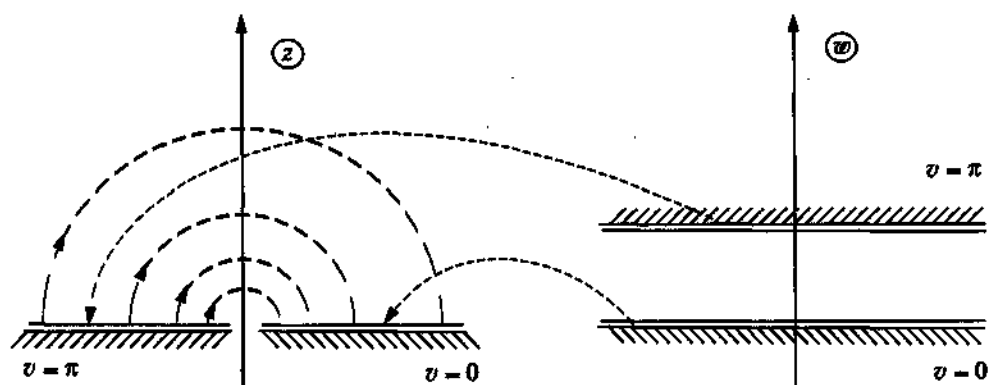


Рис. 9.6. К расчету ЭП двух расположенных рядом полуплоскостей, имеющих разные потенциалы

Приближенные методы конформных отображений. Имея произвольную аналитическую функцию, легко изучить конформное отображение, ею осуществляемое. Любая область D , в которой функция $w = f(z)$ однолистка, с помощью этой функции конформно отображается на некоторую область Δ . Таким образом, для каждой такой функции необходимо получать различные примеры конформных отображений, геометрически иллюстрирующих данную функцию. Однако для практических целей больший интерес представляет значительно более трудная обратная задача, которая считается основной задачей теории конформных отображений.

Заданы области D и Δ , требуется построить функцию, осуществляющую конформное отображение одной области на другую.

Следует заметить, что данная задача в общем виде неразрешима. Существует ряд ограничений на области, которые можно конформно отобразить друг на друга. Часто в практических инженерных приложениях пользуются приближенными методами конформных преобразований, используя интегральные

функции. Одной из таких функций является интеграл Кристоффеля–Шварца [9.5, с. 227], который используется широко при решении электротехнических задач. При решении гидродинамических задач широко используется интеграл Келдыша–Седова [9.5, с. 295]. Поскольку рассмотрение приближенных методов конформных отображений представляет определенные трудности и требует специальной подготовки, то в учебных курсах электротехники такое рассмотрение не проводится. Подробнее ознакомиться с приближенными методами конформных отображений можно в специальной литературе [9.5, с. 153; 9.6, с. 156].

Контрольные вопросы к главе 9

- 9.1. Какими аналитическими методами можно рассчитать статическое поле в непроводящей среде?
- 9.2. Какие методы целесообразно использовать для расчета квазистатического поля в непроводящей среде?
- 9.3. Как можно рассчитать статическое поле в проводящей среде?
- 9.4. Как можно рассчитать квазистатическое поле в проводящей среде?
- 9.5. Назовите основные преимущества метода зеркальных отображений.
- 9.6. В каких областях с наибольшей эффективностью можно использовать метод разделения переменных?
- 9.7. В каких областях целесообразно применять метод конформных отображений?
- 9.8. В какой области широко используются приближенные методы конформных отображений. Назовите некоторые распространенные формулы отображения.
- 9.9. Перечислите методы расчета статических полей, дающие наибольший эффект в плоских и осесимметрических конструкциях.

Библиографический список к главе 9

- 9.1. *Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т.* Эквивалентные граничные условия в электродинамике. — СПб.: Безопасность, 1999. — 416 с.
- 9.2. *Аполлонский С. М.* Электромагнитное поле в неоднородных средах. — СПб.: СЗТУ, 2006. — 538 с.
- 9.3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1971. — 576 с.
- 9.4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1973. — 736 с.
- 9.5. *Фильчаков П. Ф.* Приближенные методы конформных отображений. — Киев: Наук. думка, 1964. — 532 с.
- 9.6. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. — М.: МИР, 1964. — 773 с.
- 9.7. *Говорков В. А.* Электрические и магнитные поля. — М.: Энергия, 1986. — 488 с.

Глава 10

Методы расчета переходных процессов в электромагнитном поле

10.1. О расчете переходных процессов в электромагнитном поле

Вопросы исследования переходных процессов в ЭМП приобретают большое значение при решении задач электромагнитной совместимости (ЭМС) и электромагнитной экологии (ЭМЭ). Необходимость в решении их связана, прежде всего, с развитием импульсной техники. Импульсные процессы широко используются в радиолокации, радионавигации, телевидении и многоканальной связи, а также в быстродействующих компьютерах.

В настоящее время длительность импульсов достигает $10^{-8} \div 10^{-10}$ с. При столь кратковременных импульсах особое значение приобретает влияние вихревых токов на импульсный процесс. Расчет этого влияния связан с расчетом проникновения практически скачкообразно изменяющегося внешнего ЭМП в проводящие тела, иначе говоря, с расчетом переходных процессов в ЭМП.

Расчет переходных процессов в ЭМП связан с определенными трудностями, возникающими вследствие изменения параметров сред при переходных процессах. При постоянстве параметров сред, в которых распространяются ЭМП, возможен расчет как классическим методом, так и методами наложения, спектральным и операторным.

В отличие от электрических цепей с сосредоточенными параметрами, где искомые величины (напряжения и токи) являются функциями только времени, в ЭМП напряженности являются функциями и координат, и времени. Поэтому при использовании классического метода здесь приходится решать дифференциальные уравнения в частных производных и определять вид решения и постоянные интегрирования на основании начальных и граничных условий. В частном случае, когда напряженность зависит только от одной координаты, расчет переходных процессов в поле сходен с расчетом переходных процессов в длинных линиях. Рассмотрим некоторые задачи, связанные с необходимостью расчета переходных процессов в ЭМП.

10.2. Установление магнитного потока в пластине

Пусть пластина (рис. 10.1), для которой рассматривается поверхностный эффект, находится в синусоидальном внешнем МП, которое изменяется скачкообразно.

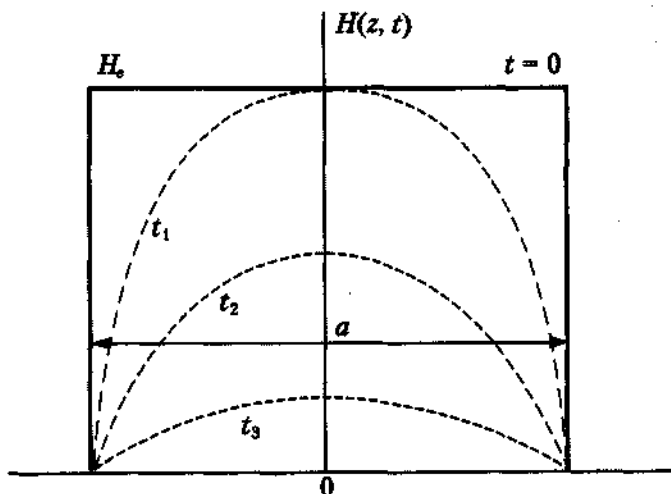


Рис. 10.1. К расчету установления магнитного потока в пластине

На практике такой режим наблюдается в магнитопроводах импульсных трансформаторов, если считать, что скорости установления тока в обмотке и его поля значительно превышают скорость установления магнитного потока в магнитопроводе.

Для определения мгновенного значения магнитного потока в пластине необходимо знать индукцию в каждой точке пластины в любой момент времени.

Удобней сначала рассмотреть процесс убывания магнитного потока, т. е. случай, когда до момента $t = 0$ ток в обмотке, образующей поле, был постоянным и напряженность в любой точке как вне, так и внутри пластины равнялась H_0 , а в момент $t = 0$ ток в обмотке, а значит, и напряженность вне пластины скачком изменились до нуля. В этом случае необходимо учитывать свободную составляющую переходного процесса.

При скачкообразном изменении тока МП в проводящей пластине скачком измениться не может. Возникающие в пластине вследствие изменения магнитного потока вихревые токи создают магнитный поток, препятствующий изменению внешнего потока. Поэтому в момент $t = 0$ во всех точках пластины напряженность равна H_0 и только на поверхности пластин равна нулю (см. рис. 10.1), поскольку вне пластины она стала равной нулю. По окончании переходного процесса напряженность поля (вынужденная составляющая) и поток в пластине будут равны нулю.

Для расчета $H(z, t)$ в переходном процессе необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \gamma \mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (10.1)$$

Применяя метод разделения переменных и полагая $H(z, t) = Z(z) \cdot T(t)$, можно получить два обыкновенных дифференциальных уравнения (постоянная разделения $-m^2$):

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = -m^2, \quad \frac{\gamma \mu}{T} \cdot \frac{dT}{dt} = -m^2. \quad (10.2)$$

Их решения соответственно равны

$$Z = A \cos mz + B \sin mz, \quad T = C e^{-\frac{m^2}{\gamma \mu} t}, \quad (10.3)$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

Частное решение уравнения (10.1) находится в виде

$$H_k(z, t) = Z_k T_k = (A_k \cos m_k z + B_k \sin m_k z) C_k e^{-\frac{m_k^2}{\gamma \mu} t}, \quad (10.4)$$

где $k \in [1, \infty]$.

Для определения постоянных интегрирования A_k, B_k, C_k и m_k необходимо использовать граничные условия.

Из условия симметрии поля относительно плоскости XOY следует

$$H(z, t) = H(-z, t), \quad (10.5)$$

откуда $B_k = 0$.

Общее решение уравнения (10.1) представляется в виде

$$H(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k e^{-\frac{m_k^2}{\gamma \mu} t} \cos m_k z, \quad (10.6)$$

где $D_k = A_k C_k$. В момент $t = 0$

$$H(z, 0) = \sum_k D_k \cos m_k z. \quad (10.7)$$

Распределение напряженности в момент $t = 0$ изображается кривой прямоугольного вида, которая аналитически представляется рядом Фурье:

$$H(z, 0) = \frac{4}{\pi} H_e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{a} \pi z. \quad (10.8)$$

Сопоставляя (10.7) и (10.8), для коэффициентов D_k и m_k получим

$$D_k = \frac{4H_e}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}, \quad m_k = \frac{2n-1}{a} \pi. \quad (10.9)$$

Вводя обозначение

$$\beta = \frac{\pi^2}{a^2 \gamma \mu},$$

решение (10.6) можно записать в виде

$$H(z, t) = \frac{4H_e}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \beta t} \cos \frac{2n-1}{a} \pi z. \quad (10.10)$$

По формуле (10.10) можно определить напряженность в каждой точке пластины для любого момента времени. На рис. 10.1 пунктирными кривыми показан характер распределения H для некоторых моментов времени $0 < t_1 < t_2 < t_3$.

Мгновенное значение магнитного потока

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= 2h\mu \int_0^{0.5a} H(z, t) dz = \\ &= \frac{8h\mu H_e}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 \beta t} \frac{a}{\pi} \sin \frac{2n-1}{a} \pi z \Big|_0^{0.5a} = \\ &= \frac{8ah\mu H_e}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 \beta t} \frac{a}{\pi} \sin \frac{2n-1}{a} \pi. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Учитывая, что

$$(-1)^{n+1} \sin \frac{2n-1}{2} \pi = 1,$$

а магнитный поток, который был в пластине до начала переходного процесса, $\Phi_0 = \mu H_e ah$, можно записать:

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 \beta t} \quad (10.12)$$

или

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 0,81 \left(e^{-\beta t} + \frac{1}{9} e^{-9\beta t} + \frac{1}{25} e^{-25\beta t} + \dots \right). \quad (10.13)$$

Из (10.13) следует, что для $\beta t \geq 0,5$ убывание магнитного потока можно рассчитывать с погрешностью менее 1 % по формуле

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 0,81 e^{-\beta t}. \quad (10.14)$$

По аналогии с переходным процессом в цепи r, L при ее коротком замыкании и включении на постоянное напряжение относительное нарастание магнитного потока в пластине при скачкообразном изменении напряженности внешнего поля от нуля до H_e определится выражением

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 \beta t}, \quad (10.15)$$

поскольку в этом случае установившийся поток будет равен Φ_0 . Для $\beta t \geq 0,5$

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 1 - 0,81e^{-\beta t}. \quad (10.16)$$

При рассмотрении переходного процесса по упрощенной формуле за коэффициент затухания условно можно принять $\beta = \pi^2 / a^2 \gamma \mu$. Тогда из полученных выражений следует, что процесс установления магнитного потока определяется толщиной пластины, ее удельной проводимостью и магнитной проницаемостью.

Графики относительного убывания и нарастания магнитного потока представлены на рис. 10.2. Из них следует, что значение $\Phi(t) / \Phi_0$ равно 0,98 при нарастании и 0,02 при убывании при $\beta t = 3,5$. Следовательно, можно считать, что магнитный поток практически устанавливается за время

$$t_y = 3,5 \frac{a^2 \gamma \mu}{\pi^2} = 0,35 a^2 \gamma \mu. \quad (10.17)$$

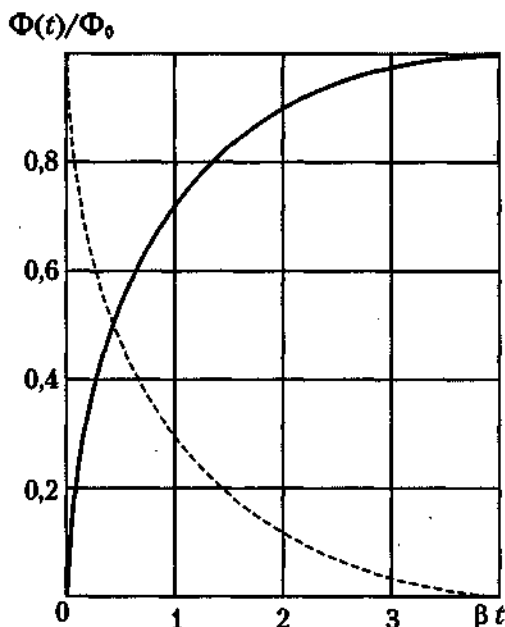


Рис. 10.2. Графики изменения магнитного потока

Поток достигает $0,5 \Phi_0$ при $\beta t = 0,5$, т. е. за время $t_{0,5} = \frac{1}{7} t_y$.

Для стальной пластины, имеющей $a = 0,0005$ м, $\gamma = 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ и $\mu = 1000 \mu_0$, $t_y = 1,1$ мс, $t_{0,5} = 0,157$ мс.

Из приведенных расчетов следует, что время установления потока можно сократить за счет уменьшения толщины a пластины или удельной проводимости γ материала. Уменьшение магнитной проницаемости μ невыгодно, поскольку

ку это уменьшит поток в установившемся режиме. Поэтому в импульсных трансформаторах магнитопроводы обычно выполняют из феррита, который имеет малую удельную проводимость, или из очень тонких стальных пластин.

10.3. Установление тока в проводе круглого сечения

Провод круглого сечения радиуса r_0 , длины l подключается к постоянному напряжению U_0 . Требуется определить плотность тока в каждой точке провода в любой момент времени и характер установления тока, если магнитная проницаемость и удельная проводимость материала провода постоянны ($\mu = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$).

Можно считать, что в момент включения цепи под напряжение ($t = 0$) напряженность ЭП вне провода устанавливается практически мгновенно по сравнению с процессом установления ЭП в проводе. Из условия равенства касательных составляющих $\vec{E}$ на поверхности провода ($r = r_0$) напряженность $E_0 = U_0 / l$ и соответствующая ей плотность тока $\delta_0 = \gamma E_0$ также установятся практически мгновенно.

Внутри провода ($r < r_0$) в момент включения плотность тока равна нулю, поскольку мгновенное изменение тока на конечную величину сопровождалось бы мгновенным изменением магнитного потока и энергии на конечную величину, что невозможно.

Можно записать уравнение, описывающее процесс установления ЭП в проводе:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial r} = \gamma \mu \frac{\partial \delta}{\partial t}. \quad (10.18)$$

Представив решение в виде

$$\delta(r, t) = R(r)T(t), \quad (10.19)$$

получают

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \cdot \frac{dR}{dr} = \frac{1}{T} \gamma \mu \frac{dT}{dt} = -m^2. \quad (10.20)$$

Отсюда

$$T = Ce^{-\frac{m^2}{\gamma \mu} t}, \quad (10.21)$$

где C — произвольная постоянная.

Полагая $x = mr$, уравнение для R можно свести к уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dR}{dx} + R = 0, \quad (10.22)$$

решение которого

$$R = A_1 J_0(mr) + A_2 N_0(mr). \quad (10.23)$$

Так как при $r \rightarrow 0$ $N_0(0) \rightarrow \infty$, то $A_2 = 0$.

По окончании переходного процесса во всех точках провода установится плотность тока δ_0 . Поэтому общее решение можно записать в виде

$$\delta(r, t) = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k T_k = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k J_0(m_k r) e^{-\frac{m_k^2}{\gamma \mu} t}. \quad (10.24)$$

Для определения постоянных интегрирования D_k и m_k необходимо обратиться к начальным и граничным условиям. В момент $t = 0$

$$\delta(r, 0) = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k J_0(m_k r_0). \quad (10.25)$$

На поверхности провода в этот момент $\delta(r_0, 0) = \delta_0$. Это значит, что при $r = r_0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k J_0(m_k r_0) = 0, \quad (10.26)$$

откуда следует, что $m_k r_0 = x_{0k}$, где x_{0k} — корни функции Бесселя нулевого порядка.

Следовательно, $m_k = x_{0k} / r_0$.

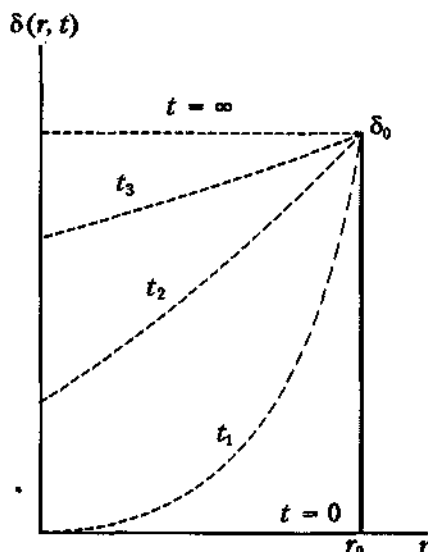


Рис. 10.3. Изменение плотности тока по радиусу провода

Во всех точках сечения $0 \leq r < r_0$ в начальный момент плотность тока равна нулю (рис. 10.3). Значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k J_0(m_k r) = -\delta_0. \quad (10.27)$$

Для определения коэффициентов D_k ряда функций Бесселя необходимо воспользоваться следующим свойством этих функций.

Если x_{0p} и x_{0q} — корни функции $J_0(x)$, то при $p = q$

$$\int_0^1 x J_0(x_{0p} x) J_0(x_{0q} x) dx = 0,5 J_1^2(x_{0p}),$$

а при $p \neq q$ значение этого интеграла равно нулю. Кроме того,

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x).$$

Умножая на $(r/r_0) J_0(x_{0p} r/r_0)$ обе части выражения и интегрируя в пределах от 0 до 1, можно получить

$$\int_0^1 \frac{r}{r_0} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right) \sum_{k=1}^{\infty} D_k J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right) d\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\delta_0 \int_0^1 \frac{r}{r_0} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right) d\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

или с учетом указанных свойств

$$0,5 D_p J_1^2(x_{0p}) = -\frac{\delta_0}{x_{0p}} J_1(x_{0p}).$$

Отсюда

$$D_p = -\frac{2\delta_0}{x_{0p} J_1(x_{0p})}.$$

Таким образом,

$$\delta(r, t) = \delta_0 \left[1 - 2 \sum_p \frac{1}{x_{0p} J_1(x_{0p})} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right) e^{-x_{0p}^2 \beta t} \right], \quad (10.28)$$

где $\beta = 1/(r_0^2 \gamma \mu)$.

Характер распределения плотности тока в проводе для моментов времени $0 < t_1 < t_2 < t_3$ показан на рис. 10.3.

Ток в проводе

$$\begin{aligned} i &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{r_0} \delta(r, t) r dr = 2\pi \delta_0 \int_0^{r_0} \left[1 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{x_{0p} J_1(x_{0p})} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right) e^{-x_{0p}^2 \beta t} \right] r dr = \\ &= 2\pi \delta_0 \left[\frac{r_0^2}{2} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{x_{0p} J_1(x_{0p})} e^{-x_{0p}^2 \beta t} \int_0^{r_0} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right) r dr \right] = \\ &= \pi r_0^2 \delta_0 \left[1 - 4 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{x_{0p}^2} e^{-x_{0p}^2 \beta t} \right]. \end{aligned} \quad (10.29)$$

С учетом $I_0 = \pi r_0^2 \delta_0$ относительное изменение тока в проводе

$$\frac{i}{I_0} = 1 - 4 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{x_{0p}^2} e^{-x_{0p}^2 \beta t} \quad (10.30)$$

Первые три корня функции Бесселя нулевого порядка равны $x_{01} = 2,41$, $x_{02} = 5,52$, $x_{03} = 8,65$. В соответствии с этим

$$\frac{i}{I_0} = 1 - 0,692e^{-5,78\beta t} - 0,131e^{-30,5\beta t} - 0,053e^{-75\beta t} - \dots \quad (10.31)$$

Для значений $\beta t > 0,1$ можно принять

$$\frac{i}{I_0} = 1 - 0,692e^{-5,78\beta t} \quad (10.32)$$

График относительного нарастания тока показан на рис. 10.4 сплошной кривой.

При $\beta t = 0,6$ ток достигает 98 % установившегося значения. Значит, практически время установления тока можно принять $t_y = \frac{0,6}{\beta} = 0,6r_0^2\gamma\mu$.

Для стального провода $r_0 = 0,0005$ м, $\gamma = 10^7$ Ом⁻¹ · м⁻¹, $\mu = 1000\mu_0$, $t_y = 1,88$ мс.

Для медного провода $r_0 = 0,0005$ м, $t_y = 1,107$ мс.

Очевидно, относительное убывание тока после отключения напряжения (при сохранении замкнутого контура) определится выражением (10.32), что графически показано на рис. 10.4 пунктирной линией.

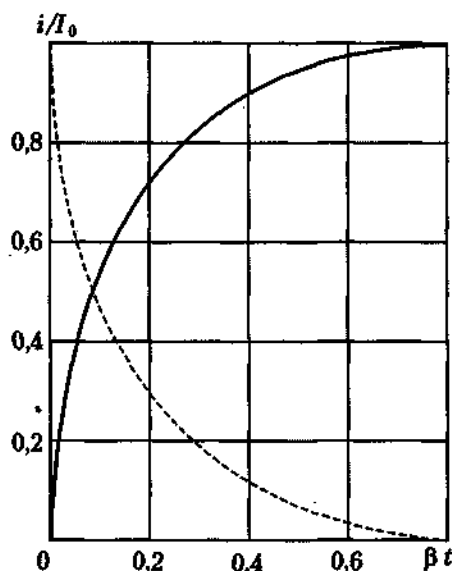


Рис. 10.4. Распределение плотности тока в проводе

Важно отметить, что при убывании тока его плотность у поверхности провода равна нулю, а на оси — максимальна в течение всего переходного процесса.

Из выполненных расчетов следует, что процесс установления тока в проводе определяется его радиусом, удельной проводимостью и магнитной проницаемостью.

10.4. Экранирование импульсного магнитного поля круговой цилиндрической оболочкой

Общий подход к решению задачи. Задача расчета неоднородного в пространстве квазистатического или импульсного МП, воздействующего на проводящий ферромагнитный экран, в инженерной практике встречается нередко. Такая задача возникает, например, при расчете наводок, возникающих при размагничивании транспортных средств (в частности, судов) внешними МП, на измерительных и управляющих кабелях, на электронной аппаратуре. Проводящим экраном в данном случае служит корпус судна, и воздействующее размагничивающее поле может существенно изменяться по длине корпуса. Определение эффективности экранирования оболочек и металлических конструкций необходимо также при расчете наводок на кабели и аппаратуру управления, расположенные вблизи силового электрооборудования, являющегося источником существенных МП. Ниже представлены результаты расчета эффективности экранирования круговыми цилиндрическими оболочками, которыми могут быть аппроксимированы многие реальные экраны (корпуса транспортных средств, оболочки блоков аппаратуры, кабельные волноводы и т. д.). Воздействующее поле предполагается плоскопараллельным. Это означает, что в каждый фиксированный момент времени его величина одинакова для всех точек любого поперечного сечения цилиндра, но различна для точек двух соседних поперечных сечений. При воздействии на оболочку квазистатических МП экранирующее действие определяется путем расчета функций экранирования оболочки. При воздействии импульсных полей расчет эффективности экранирования проводится с использованием импульсных функций оболочки, которые определяются исходя из предварительно полученных функций экранирования квазистатических МП.

Метод расчета. Используется метод расчета эффективности экранирования каноническими оболочками с помощью дифференциальных уравнений в частных производных для скалярного магнитного потенциала и эквивалентных граничных условий (например, [10.8–10.9]). При расчете приняты допущения: МП, воздействующее на оболочку, является квазистатическим ($\lambda \gg D$, где λ — длина волны воздействующего поля, D — характерный размер оболочки), экранирующая оболочка предполагается тонкостенной ($d < \delta$, где d — толщина экрана, δ — глубина проникновения поля в материал оболочки),

магнитная проницаемость материала экрана μ_s принята постоянной ($\mu_s = \text{const}$). Последнее допущение предполагает линейный характер процессов в материале экрана и позволяет рассматривать отдельно экранирование составляющих поля, направленных вдоль соответствующих осей координатной системы. Для напряженности воздействующего МП справедливо соотношение

$$\vec{H}^{(0)}(\vec{r}, j\omega) = \vec{H}^{(0)}(\vec{r}) \exp(j\omega t), \quad (10.33)$$

где $\vec{H}^{(0)}(\vec{r}, j\omega)$ — вектор напряженности воздействующего поля, $\vec{H}^{(0)}(\vec{r})$ — вектор комплексной амплитуды поля, $\vec{r}$ — радиус-вектор из начала координат, ω — круговая частота, t — время.

В декартовой системе координат x, y, z (рис. 10.5) $\vec{H}^{(0)}(\vec{r}) = \vec{H}^{(0)}(z) - \text{const}$ (x, y) направление осей x и y всегда можно выбрать таким, чтобы составляющая вектора напряженности по оси x равнялась нулю ($\vec{H}^{(0)}(\vec{r}) = 0$).

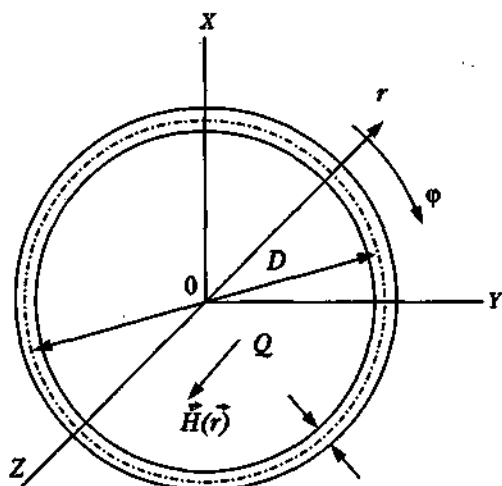


Рис. 10.5. Экранирование импульсного магнитного поля круговой цилиндрической оболочкой

Рассмотрим экранирование составляющей напряженности МП, вектор которой направлен вдоль оси x . Скалярный магнитный потенциал определяется выражением

$$u_y^{(0)}(z, y, j\omega) = - \int_0^y \dot{H}_y^{(0)}(z) \exp(j\omega t) dy, \quad (10.34)$$

где $u_y^{(0)}(z, y, j\omega)$, $\dot{H}_y^{(0)}(z)$ — скалярный потенциал и составляющая напряженности воздействующего поля по оси y .

Ранее было принято, что воздействующее МП является плоскопараллельным

$$\int_0^y \dot{H}_y^{(0)}(z) \exp(j\omega t) dy = \dot{H}^{(0)}(z) \exp(j\omega t) dy,$$

поэтому при переходе к координатам x, y, z : $y = r \sin \varphi$,

$$\dot{u}_y^{(0)} = -\dot{H}_y^{(0)}(z) \exp(j\omega t) r \sin \varphi. \quad (10.35)$$

На интервале $(0, L)$, где L — длина цилиндрической оболочки, напряженность $\dot{H}_y^{(0)}(z)$ по оси y может быть разложена в ряд Фурье:

$$\dot{H}_y^{(0)}(z) = 0,5 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} z\right).$$

Подставляя $\dot{H}_y^{(0)}(z)$ в (10.35) и вынося за скобку общие множители, получим

$$\dot{u}_y^{(0)} = - \left[0,5 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n \cos(\Omega_n z) \right] r \sin \varphi \exp(j\omega t), \quad (10.36)$$

где $\Omega_n = \pi n / L$.

В дальнейшем рассматривается экранирование члена полученного ряда (пространственной гармоники). При этом выражение для соответствующего члена ряда скалярного потенциала поля, индуцированного экраном [10.10]:

$$\dot{u}_{ny}^{(e)} = -\dot{A}_n \cos(\Omega_n z) \sin \varphi \dot{f}_{ny}(\vec{r}) \exp(j\omega t), \quad (10.37)$$

где $\dot{f}_{ny}(\vec{r})$ — неизвестная функция, подлежащая определению. Для определения функции $\dot{f}_{ny}(\vec{r})$ производится подстановка выражения (10.37) в уравнение Лапласа для скалярного потенциала $\dot{f}_{ny}(\vec{r})$ (в координатах r, φ, z):

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial z^2} = 0,$$

откуда

$$\dot{f}_{ny}''(\vec{r}) + \frac{1}{r} \dot{f}_{ny}'(\vec{r}) - \left(\frac{1}{r^2} + \Omega_n^2 \right) \dot{f}_{ny}(\vec{r}) = 0. \quad (10.38)$$

Решение уравнения (10.38) может быть записано в виде:

$$\dot{f}_{ny}(\vec{r}) = \dot{C}_{ny} I_1(\Omega_n \vec{r}) + \dot{B}_{ny} K_1(\Omega_n \vec{r}),$$

где $\dot{C}_{ny}, \dot{B}_{ny}$ — неизвестные постоянные интегрирования, подлежащие определению; $I_1(\Omega_n \vec{r}), K_1(\Omega_n \vec{r})$ — модифицированные цилиндрические функции 1-го и 2-го рода первого порядка соответственно.

Пространственные гармоники скалярного потенциала поля, возбужденного круговой цилиндрической оболочкой радиуса R в ее внутренней области ($\dot{u}_{ny}^{(e(2))}$) и во внешней области ($\dot{u}_{ny}^{(e(1))}$):

$$\begin{cases} \dot{u}_{ny}^{(e(2))} \\ \dot{u}_{ny}^{(e(1))} \end{cases} = -\dot{A}_n \cos(\Omega_n z) \sin \varphi \exp(j\omega t) \begin{cases} \dot{C}_n I_1(\Omega_n r), r < R, \\ \dot{B}_n K_1(\Omega_n r), r > R. \end{cases} \quad (10.39)$$

Для скалярного потенциала суммарного поля пространственные гармоники во внутренней области ($\dot{u}_{ny}^{(2)}$) и во внешней области ($\dot{u}_{ny}^{(1)}$) описываются выражениями

$$\begin{cases} \dot{u}_{ny}^{(2)} \\ \dot{u}_{ny}^{(1)} \end{cases} = -A_n \cos(\Omega_n z) \sin \varphi \exp(j\omega t) \begin{cases} r + \dot{C}_{ny} I_1(\Omega_n r), r < R, \\ r + \dot{B}_{ny} K_1(\Omega_n r), r > R. \end{cases} \quad (10.40)$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся граничными условиями С. В. Жукова [10.1]:

$$\begin{aligned} \dot{H}_r^{(1)} \pm \dot{H}_r^{(2)} = & \pm \frac{1}{h_\varphi h_z} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\begin{pmatrix} p_s \\ q_s \end{pmatrix} h_z \left(\dot{H}_\varphi^{(1)} \pm \dot{H}_\varphi^{(2)} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[\begin{pmatrix} p_s \\ q_s \end{pmatrix} h_\varphi \left(\dot{H}_z^{(1)} \pm \dot{H}_z^{(2)} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10.41)$$

где $\dot{H}_\beta^{(i)}$ ($\beta = r, \varphi, z$) — составляющие векторов напряженности суммарного поля по осям β вне ($i=1$) и внутри экрана ($i=2$) соответственно; h_β ($\beta = \varphi, z$) — коэффициенты Ламе; $p_s = \mu_s \Delta / (2\mu_0)$; $q_s = 2 / (j\omega \mu_0 \sigma_s \Delta)$, $\Delta = (2/k) \operatorname{th}(kd/2)$, σ_s — электрическая проводимость экрана.

После подстановки в (10.41) соответствующих составляющих вектора напряженности МП вне и внутри экрана и решения полученной системы уравнений относительно $\dot{C}_{ny}$ получим

$$\dot{C}_{ny} = \frac{2Kp_s \beta_n (Rq_s \beta_n + 1) - 2K'(Rp_s \beta_n + 1)}{\beta_n (q_s + p_s) R^{-1} - 2IKp_s q_s \beta_n^2 + 2I'K'}, \quad (10.42)$$

где

$$\begin{aligned} K &= K_1(\Omega_n R), \quad K' = [K_1(\Omega_n R)]'_r, \quad I = I_1(\Omega_n R), \\ I' &= [I_1(\Omega_n R)]'_r, \quad \beta_n = (1/R^2) + \Omega_n^2. \end{aligned}$$

Функция экранирования $\dot{S}_{\dot{H}_{ny}}$ определяется в виде

$$\dot{S}_{\dot{H}_{ny}} = \dot{H}_{ny}^{(2)} / \dot{H}_{ny}^{(0)}, \quad (10.43)$$

где $\dot{H}_{ny}^{(2)}$, $\dot{H}_{ny}^{(0)}$ — пространственные гармоники ny -й составляющей напряженности суммарного поля в полости экрана и воздействующего на экран поля соответственно.

Выражения для $\dot{H}_{ny}^{(2)}$ и $\dot{H}_{ny}^{(0)}$ получаются из выражений для соответствующих гармоник $\dot{H}_r^{(2)}$ и $\dot{H}_r^{(0)}$ в координатах $r, \varphi, z = 0, 5\pi$.

Используя (10.37) и (10.41) и проведя вычисление соответствующих градиентов, получим

$$\begin{cases} \dot{H}_{ny}^{(2)} \\ \dot{H}_{ny}^{(0)} \end{cases} = A_n \cos(\Omega_n z) \exp(j\omega t) \begin{cases} 1 + \dot{C}_{ny} [I_1(\Omega_n r)]'_r, \\ 1 \end{cases} \quad (10.44)$$

откуда

$$\dot{S}_{H_w} = 1 + \dot{C}_w [I_1(\Omega_n r)]'_r.$$

Для удобства дальнейших расчетов выделим в частотном диапазоне воздействующего МП две области, для которых выполняются условия

$$\Delta = \begin{cases} d, d < 2\delta, \\ (1-j)\delta, d > 2\delta. \end{cases}$$

Граничной для обеих областей является частота $\omega_0 = 8/(d^2\mu_s\sigma_s)$, которой соответствует время нарастания импульса воздействующего поля $t_0 = 0,25d^2\mu_s\sigma_s$.

Для диапазона низких частот воздействующего поля ($\omega < \omega_0$) $\Delta = d$, с учетом выражения (10.44), получим

$$\dot{S}_{H_w}(j\omega) = 1 + \frac{j\omega\alpha_{n1} + \alpha_{n2}}{j\omega\alpha_{n3} + \alpha_{n4}} [I_1(\Omega_n r)]'_r, \quad (10.45)$$

где

$$\alpha_{n1} = 2\mu_0\sigma_s d [Kp_s\beta_n - K'(Rp_s\beta_{in} + 1)], \quad \alpha_{n2} = 4KRp_s\beta_n^2, \\ \alpha_{n3} = \mu_0\sigma_s d [\beta_n p_s (\Omega_n R)^{-1} + 2I'K'], \quad \alpha_{n4} = 2\beta_n [R^{-1} - 2IKp_s\beta_n].$$

Проведя аналогичные выкладки для первого слагаемого выражения (10.37) для $\dot{C}_{0y}$ и $\dot{S}_{0y}(j\omega)$, получим

$$\dot{C}_{0y} = -\frac{q_s p_s + 2p_s R + R^2}{(q_s + p_s)R + q_s p_s + R^2}, \quad (10.46)$$

$$\dot{S}_{0y}(j\omega) = 1 + \frac{j\omega\alpha_{01} + \alpha_{02}}{j\omega\alpha_{03} + \alpha_{04}},$$

где

$$\alpha_{01} = \mu_0\sigma_s d R (2p_s + R), \quad \alpha_{02} = 2p_s, \\ \alpha_{03} = -\mu_0\sigma_s d R (p_s + R), \quad \alpha_{04} = -2(p_s + R).$$

Применив теорему Хевисайда [10.11] к выражению (10.46), для импульсной функции получим

$$\dot{S}_{H_w}(\vec{n}, t) = \dot{S}(t) + \frac{\alpha_2}{\alpha_4} [I_1(\Omega_n r)]'_r + \\ + \frac{\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3}{\alpha_3\alpha_4} [I_1(\Omega_n r)]'_r e^{-\frac{\alpha_4 t}{\alpha_3}}, \quad (10.47)$$

где $\dot{S}(t)$ — функция Дирака.

Нахождение $\dot{S}_{H_{\omega}}(t)$ для высокочастотной области ($\Delta = (1-j)\delta$) связано со значительными математическими трудностями, поэтому целесообразно начальный участок импульсной функции аппроксимировать прямой

$$\dot{S}_{H_{\omega}}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{S}_{H_{\omega}}(\vec{r}, t_0)}{t_0} t. \quad (10.48)$$

Пространственная гармоника поля внутри экрана определяется как свертка соответствующей пространственной гармоники воздействующего поля и импульсной функции экрана:

$$\dot{H}_{ny}^{(2)}(r, z, t_1) = \int_0^{t_1} \dot{H}_{ny}^{(0)}(z, t) \dot{S}_{ny}(r, t - \tau) d\tau.$$

Используя (10.48),

$$\begin{aligned} \dot{H}_{ny}^{(2)}(r, z, t_1) &= \dot{H}_{ny}^{(0)}(z, t_1) + \\ &+ \frac{\alpha_2}{\alpha_4} [I_1(\Omega_n r)]'_r \cdot \dot{H}_{ny}^{(0)}(z, t_1) + \int_0^{t_1} \dot{H}_n^{(0)}(z, \tau) \dot{S}_{H_{\omega}}(r, t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Результирующее значение y -й составляющей поля в точке $(r, z, \varphi = 0, 5\pi)$ внутри экрана в момент времени t_1 определяется суммированием величин всех пространственных гармоник внутреннего поля:

$$\dot{H}_y^{(2)}(r, z, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{H}_{ny}^{(2)}(r, z, t_1). \quad (10.50)$$

Ход вычислений и все выкладки для расчета экранирования составляющей напряженности воздействующего поля, направленной по оси z ($\dot{H}_z^{(0)}$), аналогичны проведенным для составляющей $\dot{H}_y^{(0)}$. Функции экранирования $\dot{S}_{H_{\omega}}(j\omega)$:

$$\dot{S}_{H_{\omega}}(j\omega) \Big|_{\omega < \omega_0} = 1 + \frac{j\omega\alpha'_{n1} + \alpha'_{n2}}{j\omega\alpha'_{n3} + \alpha'_{n4}} I_0(\Omega_n r), \quad (10.51)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha'_{n1} &= -2\mu_0\sigma_s d K'_0 p_s, \alpha'_{n2} = 4K_0 p_s \Omega_n^2, \alpha'_{n3} = \mu_0\sigma_s d [p_s(\Omega_n R)^{-1} + 2I'_0 K'_0(\Omega_n)^{-2}], \\ \alpha'_{n4} &= 2(\Omega_n R)^{-1} - 4I_0 K_0 p_s \Omega_n^2, I_0 = I_0(\Omega_n R), K_0 = K_0(\Omega_n R), \\ I'_0 &= [I_0(\Omega_n R)]'_r, K'_0 = [K_0(\Omega_n R)]'_r. \end{aligned}$$

Для постоянной по координате z составляющей воздействующего продольного поля

$$\dot{S}_{H_{0z}}(j\omega) \Big|_{\omega < \omega_0} = 1 + \frac{j\omega\alpha'_{01} + \alpha'_{02}}{j\omega\alpha'_{03} + \alpha'_{04}} I_0(\Omega_n R), \quad (10.52)$$

где

$$\alpha'_{01} = -\mu_0\sigma_s d R, \alpha'_{02} = 0, \alpha'_{03} = \mu_0\sigma_s d R, \alpha'_{04} = 2.$$

Дальнейшие вычисления проводятся по формулам (10.48–10.50) при замене $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \alpha_{n4}$ на $\alpha'_{n1}, \alpha'_{n2}, \alpha'_{n3}, \alpha'_{n4}$ соответственно.

Результаты расчета. На основании полученной методики составлена программа расчета эффективности экранирования с помощью компьютера, проведены численные расчеты для следующих данных:

$$L = 4 \text{ м}, R = 0,5 \text{ м}, d = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \mu_s = 180\mu_0, \sigma_s = 6,6 \cdot 10^6 \text{ См/м}.$$

Параметры импульса воздействующего поля (рис. 10.6): $H_m = 80 \text{ А} \cdot \text{м}^{-1}$, $\tau_{i(0,1-0,9)} = 8,0 \text{ нс}$, $\tau_{i(0,5)} = 20 \text{ нс}$.

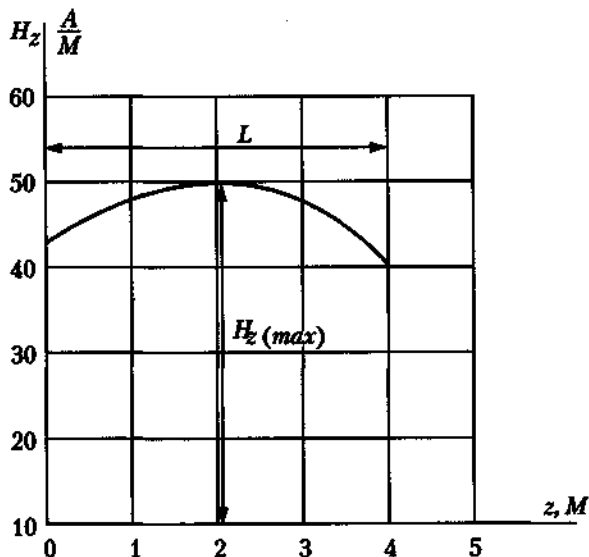


Рис. 10.6. Форма воздействующего импульса МП

Результаты расчетов с погрешностью до 15 % совпали с экспериментальными результатами. При этом распределение поперечного поля в полости экрана соответствовало распределению воздействующего поля, а распределение продольного поля значительно отличалось от воздействующего поля. Для этих составляющих экран снижал исходное поле приблизительно в 100 раз.

Контрольные вопросы к главе 10

- 10.1. К каким видам уравнений математической физики приводятся уравнения, описывающие переходные процессы в ЭМП?
- 10.2. Как устанавливается ЭМП в проводящем электрический ток немагнитном материале при воздействии на него импульсного ЭМП?
- 10.3. Как устанавливается ЭМП в проводящем электрический ток ферромагнитном материале при воздействии на него импульсного ЭМП?
- 10.4. Как зависит время установления ЭМП в материале от формы воздействующего импульсного ЭМП?

Библиографический список к главе 10

- 10.1. Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. — СПб.: Безопасность, 1999. — 416 с.
- 10.2. Аполлонский С. М. Электромагнитное поле в неоднородных средах. — СПб.: Изд-во СЗТУ, 2006. — 538 с.
- 10.3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1971. — 576 с.
- 10.4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1973. — 736 с.
- 10.5. Фильчаков П. Ф. Приближенные методы конформных отображений. — Киев: Наук. думка, 1964. — 532 с.
- 10.6. Шимони К. Теоретическая электротехника. — М.: МИР, 1964. — 773 с.
- 10.7. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля. — М.: Энергия, 1986. — 488 с.
- 10.8. Аполлонский С. М. Расчет электромагнитных экранирующих оболочек. — Л.: Энергоиздат, 1982. — 144 с.
- 10.9. Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. — Минск: Изд-во Белорусских университетов, 1988. — 220 с.
- 10.10. Kaden H. Shielding Effect of Thin-Walled Metal Cylinders of Rectangular Cross Section // Siemens Forsch. and Entwicklung (Berlin), 1977, v. 6, n. 12, p. 103–109.
- 10.11. Страттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М.: Гостехиздат, 1948. — 697 с.

Глава 11

Распространение электромагнитного поля

11.1. Уравнения Максвелла в символической форме записи

Уравнения (7.8) и (7.10) записаны для мгновенных значений. Если напряженности E и H изменяются во времени синусоидально, то можно воспользоваться символическим методом и записать эти уравнения (7.8) и (7.10) с помощью комплексных чисел. Пусть

$$E = E_m \sin(\omega t + \phi_E), \quad H = H_m \sin(\omega t + \phi_H). \quad (11.1)$$

Можно записать:

$$E = \operatorname{Im} \dot{E}_m e^{j\omega t}, \quad (11.2)$$

где Im — мнимая часть, $\dot{E}_m = E_m e^{j\phi_E}$.

Аналогично

$$H = \operatorname{Im} \dot{H}_m e^{j\omega t}. \quad (11.3)$$

Можно перейти к условной форме записи (к изображениям):

$$E \rightarrow \dot{E}_m e^{j\omega t}, \quad (11.4)$$

$$H \rightarrow \dot{H}_m e^{j\omega t}, \quad (11.5)$$

где стрелка представляет значок соответствия.

Поскольку напряженности E и H , кроме того, что они меняются во времени по синусоидальному закону, являются функциями векторными, то над ними ставят стрелку и точку $\vec{E}_m$ и $\vec{H}_m$. Стрелка означает, что речь идет о векторе в пространстве, точка — о том, что проекции этого вектора на любую из координатных осей во времени изменяются синусоидально.

В дальнейшем переходим от амплитудных значений к действующим значениям, поэтому опускаем индекс m . Члены уравнений Максвелла теперь записываются в виде изображений:

$$\operatorname{rot} \vec{H} \rightarrow e^{j\omega t} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}, \quad \vec{\delta}_{np} \rightarrow \gamma \dot{\vec{E}} e^{j\omega t}, \quad \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow j\omega \epsilon \dot{\vec{E}} e^{j\omega t}, \quad (11.6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} \rightarrow e^{j\omega t} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}, \quad \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \rightarrow j\omega \mu \dot{\vec{H}} e^{j\omega t}.$$

Подстановка (11.6) в дифференциальные уравнения Максвелла (7.8) и (7.10) дает возможность перейти к следующей форме записи (член $e^{j\omega t}$, входящий во все члены уравнений и независимый от координат, сокращается):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -j\omega \epsilon' \vec{E}, \quad (11.7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}, \quad (11.8)$$

где $\epsilon' = \epsilon + j(\gamma/\omega)$.

Исключив из (11.7), (11.8) вектор $\vec{E}$ или $\vec{H}$, получим уравнения Гельмгольца отдельно для $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (11.9)$$

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (11.10)$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon' \mu}$ — волновое число.

11.2. Уравнения Максвелла в проводящей среде

Пусть ЭМП распространяется в среде с электрической проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ . Уравнения Максвелла (11.7), (11.8) запишутся в виде:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}, \quad (11.11)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}, \quad (11.12)$$

так как в электрически проводящей среде при промышленных частотах ($f \leq 10^5$, Гц) $\gamma \gg \omega \epsilon$, что дает возможность пренебречь токами смещения.

Уравнения (11.11) и (11.12) представляют собой уравнения с двумя неизвестными $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Можно осуществить разделение переменных. Для этого возьмем ротор от уравнения (11.11) и используем известную формулу векторного анализа (см. приложение 3). Тогда

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = \gamma \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Учтем, что $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, и поэтому $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} = 0$. Значение $\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}$ подставим из уравнения (11.12). Получим

$$\nabla^2 \vec{H} = j\omega \gamma \mu \vec{H}. \quad (11.13)$$

Уравнение (11.13) является дифференциальным относительно $\vec{H}$. Аналогичные операции можно осуществить с уравнением (11.12) для получения дифференциального уравнения относительно $\vec{E}$:

$$\nabla^2 \vec{E} = j\omega \gamma \mu \vec{E}. \quad (11.14)$$

Рассмотрим решения (11.13) и (11.14) для случая плоской электромагнитной волны.

11.3. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде

Под плоской электромагнитной волной понимают волну, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ которой расположены в плоскости xOy , перпендикулярной направлению распространения волны (ось Oz), и изменяющиеся только в функции координаты z и времени t (рис. 11.1). Расположим координатные оси так, чтобы ось Oy совпадала с магнитной напряженностью поля $\vec{H}$. При этом $\vec{H} = \vec{j}\dot{H}$, где $\vec{j}$ — единичный орт оси Oy декартовой системы координат.

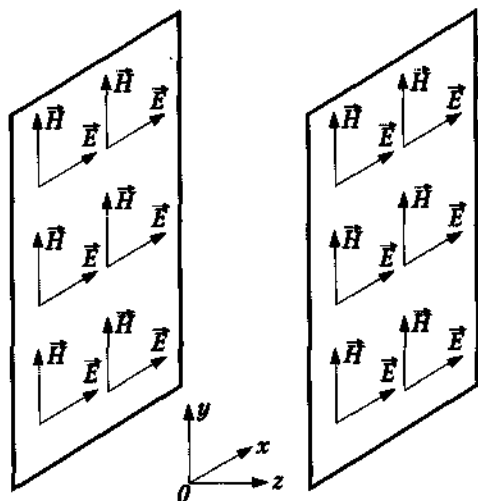


Рис. 11.1. Распространение электромагнитной волны

Из условия определения плоской волны

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \dot{E}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{E}}{\partial y} = 0.$$

Подставим $\vec{H} = \vec{j}\dot{H}$ в уравнение (11.13) и раскроем ∇^2 (см. приложение 3):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{j}\dot{H} = j\omega\gamma\mu \vec{j}\dot{H}. \quad (11.15)$$

Учтем, что

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial y^2} = 0.$$

Тогда из (11.15) получим

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = j\omega\gamma\mu \dot{H}. \quad (11.16)$$

В уравнении (11.16) вместо частной производной использована полная производная. Это связано с тем, что $\dot{H}$ является функцией лишь одной переменной z .

Уравнение (11.16) представляет собой линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, решение которого находится в виде [11.3]

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}, \quad (11.17)$$

где $\dot{C}_1, \dot{C}_2$ — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

Из характеристического уравнения $p^2 = j\omega\gamma\mu$ найдем коэффициент

$$p = \sqrt{j\omega\gamma\mu}. \quad (11.18)$$

Если принять во внимание, что $\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = (1+j)/\sqrt{2}$, то p можно представить в виде

$$p = k(1+j), \quad (11.19)$$

где $k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}$.

Электрическую напряженность ЭМП можно найти из уравнения (11.11):

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{\gamma} \text{rot } \dot{\vec{H}}.$$

Найдем, прежде всего, $\text{rot } \dot{\vec{H}}$, учитывая $\frac{\partial \dot{H}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = 0$:

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{H} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(-\frac{\partial \dot{H}}{\partial z} \right). \quad (11.20)$$

Следовательно,

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} \right) = \vec{i} \left[-\frac{p}{\gamma} (\dot{C}_1 e^{pz} - \dot{C}_2 e^{-pz}) \right]. \quad (11.21)$$

Из (11.21) следует, что электрическая напряженность ЭМП в плоской волне при выбранном расположении осей координат направлена вдоль оси Ox , об этом свидетельствует присутствие единичного орта оси Ox . Таким образом, в плоской электромагнитной волне между $\vec{E}$ и $\vec{H}$ есть пространственный сдвиг в 90° .

Частное от деления p на γ называют *волновым сопротивлением*:

$$Z_B = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{j45^\circ}. \quad (11.22)$$

Волновое сопротивление Z_B , измеряемое в омах, зависит от свойств среды (γ, μ) и угловой частоты ω . Учитывая (11.21), проекция $\vec{E}$ на ось Ox равна

$$\dot{E} = \dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}},$$

где

$$\dot{E}_{\text{пад}} = Z_B \dot{C}_2 e^{-\mu x} \text{ и } \dot{E}_{\text{отр}} = -Z_B \dot{C}_1 e^{\mu x}.$$

Аналогично проекция $\dot{H}$ на ось Oy в соответствии с (11.17): $\dot{H} = \dot{H}_{\text{пад}} + \dot{H}_{\text{отр}}$, где

$$\dot{H}_{\text{пад}} = \dot{C}_2 e^{-\mu x} \text{ и } \dot{H}_{\text{отр}} = \dot{C}_1 e^{\mu x}.$$

Волновое сопротивление Z_B можно трактовать как отношение $\dot{E}_{\text{пад}} / \dot{H}_{\text{пад}}$. Так как волновое число является числом комплексным (11.19) и имеет аргумент 45° , то сдвиг во времени между $\dot{E}_{\text{пад}}$ и $\dot{H}_{\text{пад}}$ для одной и той же точки поля тоже равен 45° .

11.4. Теорема Умова–Пойнтинга

11.4.1. Общие сведения об энергии электромагнитного поля

В любом электротехническом устройстве всегда существуют взаимно связанные ЭП и МП. При этом процесс преобразования и передачи энергии определяется не отдельно ЭП или МП, а их совокупностью, т. е. ЭМП. В системе источник — линия передачи — приемник можно отметить следующие энергетические процессы. В источнике механическая, химическая или другая энергия преобразуется в энергию ЭМП, вдоль линии происходит передача этой энергии, а в самой линии она преобразуется в тепловую энергию потерь, в приемнике — в полезную механическую, тепловую или другие виды энергии. Поэтому очень важно выяснить роль ЭМП в процессе преобразования и передачи энергии.

Для полей в однородных средах мощность тепловых потерь в единице объема составляет

$$P_0 = \gamma E^2, \quad (11.23)$$

а объемные плотности энергии ЭП и МП соответственно равны

$$W_{e0} = \frac{\epsilon E^2}{2}, \quad W_{m0} = \frac{\mu H^2}{2}.$$

Максвелл предположил, и это в дальнейшем подтвердилось, что плотность энергии ЭМП

$$W_0 = \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}. \quad (11.24)$$

Как видно, энергия ЭМП в этом случае полностью характеризуется векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и свойствами среды. Однако выражения (11.23) и (11.24), характеризующие распределение энергии, не дают никаких указаний относительно ее движения. Между тем ясно, что передача энергии от источника к приемнику, как и выделение тепла в линии, связана с движением энергии ЭМП. Поэтому и движущаяся энергия ЭМП должна, очевидно, также определяться векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Переносимую в пространстве энергию можно характеризовать потоком энергии $\vec{P}$, проходящим в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению распространения поля. Величина плотности потока энергии подсчитывается или как произведение объемной плотности энергии на скорость распространения электромагнитной волны (редакция Умова), или как произведение величин $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (редакция Пойнтинга) $\vec{P} = w \vec{v} = \vec{E} \vec{H}$. Поскольку векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимноперпендикулярны, то плотность потока энергии изображают в виде вектора $\vec{P}$ (рис. 11.2), который (перпендикулярен к плоскости, проходящей через $\vec{E}$ и $\vec{H}$) показывает направление распространения электромагнитной волны. Вектор называют вектором Умова–Пойнтинга. Он имеет размерность мощности, отнесенной к единице поверхности. Его направление совпадает с направлением движения острия правого винта, если головку последнего вращать по кратчайшему направлению от $\vec{E}$ к $\vec{H}$.

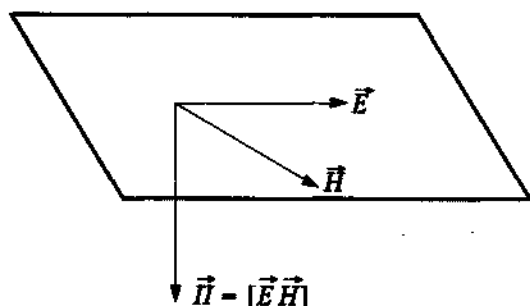


Рис. 11.2. Направление вектора Умова–Пойнтинга

Электромагнитная волна при взаимодействии с поглощающей преградой перестает существовать. Ее масса, энергия и импульс передаются преграде. Энергия электромагнитной волны преобразуется в энергию теплового движения частиц преграды. Действие электромагнитной волны в точке пространства оценивается средним значением величины вектора Умова–Пойнтинга за период волны. Эта величина называется интенсивностью электромагнитной волны. Интенсивность J плоской, линейно поляризованной монохроматической бегущей волны равна

$$J = 0,5 \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_0^2 = 0,5 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} H_0^2,$$

где $E_0(H_0)$ — амплитуда электрической (магнитной) составляющей напряженности ЭМП.

11.4.2. Теорема Умова–Пойнтинга для мгновенных значений

Большое значение в теории ЭМП имеет теорема Умова–Пойнтинга, которая описывает энергетические соотношения в поле.

Теорема Умова–Пойнтинга имеет две формы записи: первая — для мгновенных значений, вторая — комплексная форма — для синусоидально изменяющихся величин. В соответствии с (11.14) энергия ЭМП в объеме dv равна

$$W_0 dv = \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv. \quad (11.25)$$

Для того чтобы образовать выражение, в которое вошла бы полная энергия в объеме dv , умножим (11.11) на $\vec{E} dv$, а (11.12) — на $\vec{H} dv$. Получим

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} dv = \left(\gamma \vec{E} \vec{E} + \epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dv = \left(\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon E^2}{2} \right) dv, \quad (11.26)$$

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} dv = \left(-\mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dv = \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu H^2}{2} \right) dv. \quad (11.27)$$

Из (11.26) вычтем (11.27), получим

$$(\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}) dv = \left[\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \right] dv. \quad (11.28)$$

Используя формулу векторного анализа (приложение)

$$\operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H},$$

получим

$$-\operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] dv = \left[\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \right] dv.$$

Для сокращения записи обозначим векторное произведение $[\vec{E}, \vec{H}]$ через $\vec{\Pi}$, тогда

$$-\operatorname{div} \vec{\Pi} dv = \left[\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \right] dv. \quad (11.29)$$

Распространим (11.29) на некоторый объем конечных размеров, проинтегрировав по объему V :

$$-\iiint_V \operatorname{div} \vec{\Pi} dv = \iiint_V \gamma E^2 dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv. \quad (11.30)$$

В соответствии с теоремой Остроградского–Гаусса (7.26) объемный интеграл, находящийся в левой части выражения (11.20), преобразуется в поверхностный, откуда

$$-\iint_S \vec{P} d\vec{s} = \iiint_V \gamma E^2 dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv. \quad (11.31)$$

Левая часть (11.31) представляет собой поток вектора Пойнтинга (направленный внутрь объема) сквозь любую замкнутую поверхность S , ограничивающую некоторый объем V .

В соответствии с уравнением Джоуля–Ленца в дифференциальной форме γE^2 есть энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единице объема в единицу времени. Поэтому $\iiint_V \gamma E^2 dv$ есть энергия, выделяющаяся в единицу време-

ни в объеме V ; $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$ есть скорость изменения запаса электромагнитной энергии в единице объема. Но скорость изменения электромагнитной энергии есть мощность. Следовательно, поток вектора Пойнтинга сквозь любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем V , равен мощности, выделяющейся в объеме V в виде теплоты и мощности, идущей на приращение энергии ЭМП.

Теорему Умова–Пойнтинга следует трактовать как уравнение энергетического баланса; левая часть (11.31) есть мощность или энергия в единицу времени, доставляемая в виде потока Пойнтинга внутрь некоторого объема; правая часть (11.31) есть энергия, расходуемая в единицу времени внутри объема.

Соотношение (11.31) получено в предположении, что среда внутри объема V однородна и изотропна, а также в предположении, что отсутствует отраженная волна и внутри объема нет источников электродвижущей силы.

Если поле не изменяется во времени, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) = 0 \quad \text{и} \quad -\iiint_V dv \vec{P} d\vec{v} = \iiint_V \gamma E^2 dv.$$

Необходимо обратить внимание и на то, что формула (11.31) учитывает возможность прохождения потока вектора $\vec{P}$ транзитом через объем V .

11.4.3. Передача энергии от генератора к приемнику по коаксиальному кабелю

Электромагнитная энергия, от места ее генерирования передается к месту потребления по диэлектрику. Провода в линиях передачи выполняют двойную роль: они являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике. Покажем справедливость этого утверждения на простейшем примере.

Рассмотрим процесс передачи энергии от генератора к приемнику на примере идеализированного коаксиального кабеля. В нем ЭМП заключено только внутри объема, занимаемого кабелем.

Если при напряжении U по кабелю протекает ток I и сопротивлением жилы и оболочки кабеля по сравнению с сопротивлением приемника можно пренебречь, то передаваемая мощность $P = UI$.

Пренебрежение сопротивлением жилы и оболочки означает, что ЭМП в них можно пренебречь по сравнению с полем в диэлектрике между ними.

Пусть радиус жилы и внутренний радиус оболочки кабеля (рис. 11.3) таковы, что $r_2 - r_1 \ll r_1$.

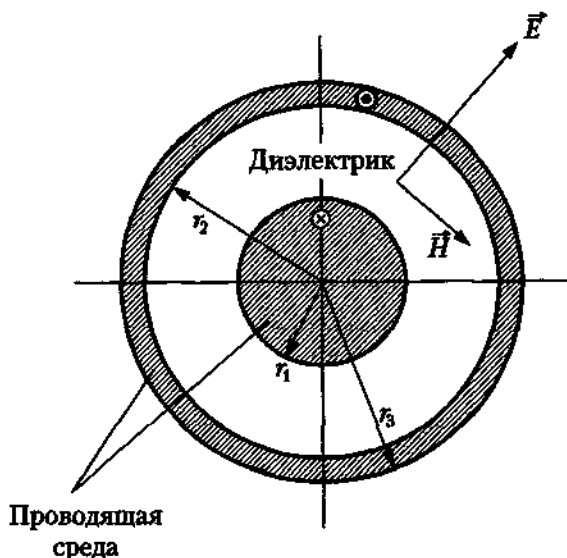


Рис. 11.3. Коаксиальный кабель

Приближенно можно считать, что напряженности E и H во всех точках диэлектрика имеют одинаковые значения и равны

$$E = \frac{U}{r_2 - r_1}, \quad H = \frac{I}{\pi(r_2 + r_1)}.$$

Отсюда $U = E(r_2 - r_1)$, $I = H\pi(r_2 + r_1)$ и мощность

$$P = EHS, \quad P = UI = EH\pi(r_2^2 - r_1^2) = EHS,$$

где S — площадь сечения диэлектрика.

Таким образом, произведение $P/S = EH$ характеризует мощность, передаваемую через единицу площади сечения диэлектрика.

Так как вектор E направлен по радиусу, вектор H перпендикулярен ему, а мощность передается вдоль оси кабеля, то произведение EH можно рассматривать как векторное.

Подсчитаем поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение диэлектрика, в рассматриваемом примере представляющее собой кольцо с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 (рис. 11.4). В реальном коаксиальном

кабеле поле неоднородно, и оба провода имеют сопротивление. В жиле и оболочке напряженности электрического поля направлены параллельно оси Oz кабеля и равны

$$E_{z1} = \frac{\delta_1}{\gamma} = \frac{I}{\gamma \pi r_1^2}, \quad E_{z2} = \frac{\delta_2}{\gamma} = \frac{I}{\gamma \pi (r_3^2 - r_2^2) r},$$

направлены перпендикулярно радиусу r в рассматриваемой точке и оси кабеля. В изоляции кабеля напряженность МП

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r},$$

а напряженность ЭП имеет и радиальную, и осевую составляющие аналогично полю двухпроводной линии. При этом радиальная составляющая представляет собой напряженность поля цилиндрического конденсатора.

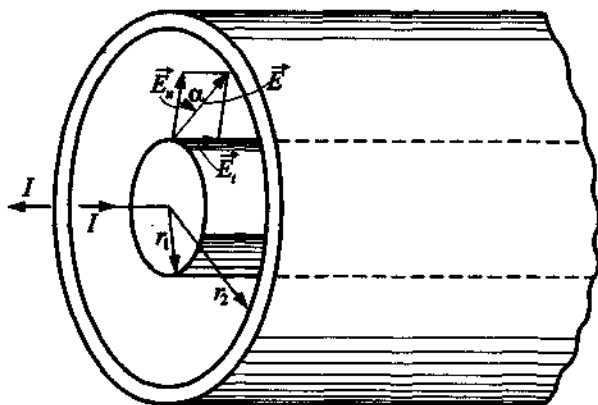


Рис. 11.4. Распространение энергии по коаксиальному кабелю

Вектор Пойнтинга имеет в изоляции составляющие осевую Π_z и радиальную Π_r , а в жиле и оболочке — только радиальную.

Осевая составляющая характеризует энергию, поступающую в жилу и оболочку и превращающуюся там в тепло. Таким образом, энергия от генератора к приемнику движется только в диэлектрике между жилой и оболочкой.

$$E_r = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Если в конце кабеля (у приемника) напряжение и радиальная составляющая напряженности ЭП соответственно равны U и E_r , то потребляемую приемником мощность можно определить как поток вектора $\vec{\Pi}$, имеющего осевую составляющую $\Pi_z = E_r H_\phi$, через поверхность S сечения диэлектрика:

$$P = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{r_1}^{r_2} \Pi_z r dr = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{I}{2\pi r} r dr = UI. \quad (11.32)$$

Мощность тепловых потерь в отрезке жилы длиной l определяется как поток вектора $\vec{P}$, имеющего радиальную составляющую $P_{r1} = E_{r1}H_{\phi1}$, через боковую поверхность цилиндра $S_1 = 2\pi r_1 l$. Поскольку составляющая P_{r1} во всех точках этой поверхности имеет одинаковые значения:

$$P_{r1} = \frac{I}{\gamma \pi r_1^2} \cdot \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{I^2}{2\gamma \pi^2 r_1^3},$$

то

$$P_1 = P_{r1} 2\pi r_1 l = I^2 R_1,$$

где $R_1 = \frac{l}{\gamma \pi r_1^2}$ — сопротивление отрезка жилы.

Если учесть, что при $r = r_2$ напряженность $H_{\phi2} = \frac{I}{2\pi r_2}$, а при $r = r_3$ она равна нулю, то мощность тепловых потерь в отрезке оболочки равна потоку вектора $\vec{P}$, имеющего радиальную составляющую

$$P_{r2} = E_{r2}H_{\phi2} = \frac{I}{\gamma \pi (r_3^2 - r_2^2)} \cdot \frac{I}{2\pi r_2},$$

через боковую поверхность цилиндра $S_2 = 2\pi r_2 l$, то есть

$$P_2 = P_{r2} 2\pi r_2 l = I^2 R_2,$$

где $R_2 = \frac{l}{\gamma \pi (r_3^2 - r_2^2)}$ — сопротивление отрезка оболочки.

Вне кабеля ЭМП отсутствует, значит, движения энергии там нет.

Проведенный анализ показывает, что энергия от источника к приемнику движется в диэлектрике между жилой и оболочкой кабеля, из диэлектрика энергия ЭМП поступает также в жилу и оболочку, где преобразуется в тепло. Аналогичным образом для двухпроводной линии передачи можно прийти к выводу, что энергия движется не по проводам, а вдоль проводов в диэлектрике, окружающем эти провода. Провода определяют направление движения энергии и поглощают часть ее на нагрев.

Из рассмотрения следует, что вектор Пойнтинга выражает поток энергии ЭМП в единицу времени (поток мощности) через единицу поверхности, нормальной к направлению распространения энергии.

Таким образом, зная распределение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в пространстве, можно определить движущуюся энергию ЭМП в каждой точке, а следовательно, и рассчитать передаваемую и затрачиваемую на нагрев проводников мощность в любом электротехническом устройстве.

Необходимо отметить, что простое наложение постоянных ЭП и МП не создает ЭМП. Например, если на ЭСП конденсатора наложить поле постоянного магнита, то, хотя в каждой точке некоторой области будут определенные

значения $\vec{E}$ и $\vec{H}$, векторное произведение этих величин нельзя трактовать как вектор Пойнтинга, поскольку здесь нет движения и преобразования энергии. Поэтому понятие вектора Пойнтинга относится только к ЭМП.

11.5. Теорема Умова–Пойнтинга в комплексной форме

Вектор Пойнтинга имеет в изоляции составляющие осевую P_z и радиальную P_r , а в жиле и оболочке — только радиальную.

Осевая составляющая характеризует энергию, поступающую в жилу и оболочку и превращающуюся там в тепло. Таким образом, энергия от генератора к приемнику движется только в диэлектрике между жилой и оболочкой.

Перед тем как записать теорему Умова–Пойнтинга в комплексной форме, рассмотрим вопрос о полной мощности в цепи переменного тока. Полная мощность $\tilde{S} = \dot{U}\hat{I} = P + jQ$.

Пусть цепь переменного тока содержит последовательно соединенные R , индуктивность L и емкость C . Тогда реактивная мощность

$$Q = I^2 X = I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \omega \left[I^2 L - I^2 \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 C \right] = 2\omega(w_m - w_e).$$

Здесь

$$w_m = \frac{LI^2}{2} \text{ и } w_e = \frac{CU_c^2}{2},$$

где U_c — напряжение на конденсаторе.

Таким образом, реактивная мощность Q равна разности между магнитной w_m и электрической w_e энергиями цепи, умноженной на 2ω . Подобно тому как в цепи переменного тока для вычисления полной мощности $\tilde{S}$ надо умножить комплекс напряжения $\dot{U}$ на сопряженный комплекс тока $\hat{I}$, вводится в употребление комплексный вектор Пойнтинга $\vec{\tilde{H}} = [\vec{E}\hat{H}]$.

Вместо $-\iint_S \vec{\tilde{H}} d\vec{S}$ теперь будет

$$-\iint_S \vec{\tilde{H}} d\vec{S} = -\iiint_V \operatorname{div} \vec{\tilde{H}} dv = \iiint_V (\vec{\dot{E}} \operatorname{rot} \hat{H} - \hat{H} \operatorname{rot} \vec{\dot{E}}) dv.$$

В соответствии с (11.11) и (11.12)

$$\operatorname{rot} \vec{\dot{H}} = \gamma \vec{\dot{E}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{\dot{E}} = -j\omega\mu\hat{H}.$$

Следовательно, $\operatorname{rot} \hat{H} = \gamma \vec{\dot{E}} - j\omega\epsilon\vec{\dot{E}}$ и

$$\vec{\dot{E}} \operatorname{rot} \hat{H} - \hat{H} \operatorname{rot} \vec{\dot{E}} = \gamma \vec{\dot{E}} \vec{\dot{E}} - j\omega\epsilon \vec{\dot{E}} \vec{\dot{E}} + j\omega\mu \hat{H} \vec{\dot{H}} =$$

$$= \gamma E^2 + 2j\omega \left(\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\epsilon E^2}{2} \right).$$

Поэтому

$$-\iint_S \vec{H} d\vec{S} = \iiint_V \gamma E^2 dv + 2j\omega \iiint_V \left(\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\epsilon E^2}{2} \right) dv. \quad (11.33)$$

Первое слагаемое правой части (11.33) представляет собой активную мощность, второе — реактивную. Таким образом, теорему Умова–Пойнтинга можно записать еще следующим образом:

$$-\iint_S \vec{H} d\vec{S} = P + jQ.$$

В таком виде ее часто используют для определения активного и внутреннего реактивного сопротивлений проводников на переменном токе.

Контрольные вопросы к главе 11

- 11.1. Назовите, какие преимущества получает расчетчик при переходе к символической форме записи уравнений ЭМП.
- 11.2. Запишите уравнения Максвелла в символической форме.
- 11.3. Как можно рассчитать активное и реактивное сопротивления материальной среды с помощью комплексных чисел?
- 11.4. Всегда ли целесообразно переходить к описанию уравнений ЭМП в символической форме?

Библиографический список к главе 11

- 11.1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М.: Высш. школа, 1978. — С. 134–138.
- 11.2. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля. — М.: Энергия, 1968. — С. 277–279.
- 11.3. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Физматгиз, 1966. — С. 278.
- 11.4. Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С. Теоретические основы электротехники. — М.: Высш. школа, 1972. — С. 397–400.

Глава 12

Расчет электромагнитных полей в анизотропных средах

12.1. Электромеханические материалы с анизотропными свойствами

Необходимость расчета электромагнитных полей в анизотропных средах возникает в самых различных практических задачах. Это задачи геофизической разведки, задачи исследования различных электромагнитных устройств с анизотропными ферромагнетиками и пьезоэлектриками, задачи электрического моделирования движения грунтовых вод в анизотропных грунтах, задачи электрического нагрева различных анизотропных материалов и, конечно, задачи изучения самих анизотропных материалов. При этом анизотропия материалов может быть самой различной. Она может быть обусловлена кристаллическим строением вещества, его микроструктурой и микроскопическими неоднородностями рассматриваемой композиции. В последнем случае, рассматривая некоторую периодическую структуру, состоящую из изотропных составляющих, вводят средние эквивалентные параметры материала, которые зависят от направления векторов ЭП и МП.

Ограничимся рассмотрением негиротропных сред с ортогональной анизотропией, т. е. сред, где всегда может быть выбрана такая ортогональная система координат, в которой удельные электрические параметры материала (диэлектрическая проницаемость, проводимость, магнитная проницаемость) выражаются диагональным тензором.

Часто встречающимся примером такой анизотропии служит прямолинейная анизотропия. В материалах с прямолинейной анизотропией при выборе осей координат x, y, z , совпадающих с осями анизотропии, анизотропный параметр $\hat{v}$ ($\hat{v} \in [\hat{\epsilon}, \hat{\mu}, \hat{\gamma}]$), где $\hat{\epsilon}$ — диэлектрическая проницаемость, $\hat{\mu}$ — магнитная проницаемость, $\hat{\gamma}$ — электрическая проводимость, выражается тензором такого вида:

$$\hat{v} = \begin{vmatrix} v_x & 0 & 0 \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & v_z \end{vmatrix}. \quad (12.1)$$

Прямолинейной анизотропией обладают, например, ферромагнитные ленты и пакеты пластин, слюда, кипы бумаги или ткани, различные волокнистые и слоистые структуры, грунты.

Вторым распространенным примером ортогональной анизотропии является аксиальная анизотропия, для которой в цилиндрических координатах r, α, z анизотропный параметр материала выражается также диагональным тензором:

$$\hat{v} = \begin{vmatrix} v_r & 0 & 0 \\ 0 & v_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & v_z \end{vmatrix}. \quad (12.2)$$

Примером материалов с аксиальной анизотропией могут стать участки ротора электрической машины, изоляция кабелей, ленточные тороиды, мотки пряжи, древесина и др.

Реже приходится иметь дело со сферической анизотропией. Примером структуры, описываемой диагональным тензором в сферических координатах, служит «луковичная» структура многослойного ферромагнитного шара.

Рассмотрим некоторые случаи расчета ЭП и МП в материалах с ортогональной анизотропией для различных частот ЭМП, когда задачи носят стационарный, квазистационарный или волновой характер.

12.2. Стационарные электрические и магнитные поля

Стационарные ЭП и МП в любых средах при отсутствии пространственных зарядов описываются уравнениями непрерывности:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \text{ для диэлектрика;} \\ \operatorname{div} \vec{\delta} &= 0 \text{ для проводника;} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \text{ для магнетика.} \end{aligned} \quad (12.3)$$

Для анизотропных сред каждый из этих векторов связан с градиентом потенциала аффинным преобразованием, выражаемым тензорным уравнением

$$\begin{aligned} \vec{D} &= -\hat{\epsilon} \operatorname{grad} \phi_\partial; \\ \vec{\delta} &= -\hat{\gamma} \operatorname{grad} \phi_\partial; \\ \vec{B} &= -\hat{\mu} \operatorname{grad} \phi_M \end{aligned} \quad (12.4)$$

В уравнениях (12.3–12.4): $\vec{D}, \vec{\delta}, \vec{B}$ — векторы электрического смещения, плотности тока и магнитной индукции; $\hat{\epsilon}, \hat{\mu}, \hat{\gamma}$ — соответственно тензоры проницаемости и электрической проводимости; ϕ_∂, ϕ_M — электрический и магнитный потенциалы.

Для анизотропных сред уравнение Лапласа приобретает следующий вид:

$$\vec{\nabla}(\hat{v} \vec{\nabla} \phi) = 0. \quad (12.5)$$

Наибольший практический интерес представляет расчет полей в неоднородных средах, где анизотропные тела находятся в изотропном пространстве.

В этих задачах бывает необходимо сопрягать решения на границах изотропной и анизотропной областей. Граничное условие сопряжения решений вытекает из уравнений непрерывности потенциала Φ_0, Φ_M и векторов поля (12.3).

Одним из путей решения этой задачи является так называемое изотропизирующее преобразование координат, т. е. отыскание такого преобразования координат в анизотропной области, чтобы в новых координатах уравнение (12.5) могло быть сведено к уравнению Лапласа и при этом на границах раздела изотропных и анизотропных сред новые координаты сопрягались бы со старыми. Этот путь был развит в ряде работ [12.1–12.7].

Вторым путем является непосредственное отыскание решений уравнения (12.5) для анизотропной области и сопряжение его с решением для изотропной области.

12.2.1. Расчеты электрических полей

При рассмотрении ЭП предполагается отсутствие пространственных зарядов.

Среды с прямолинейной анизотропией. Пусть в анизотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью, выражаемой в виде тензора второго ранга

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix},$$

создается ЭП; $\phi(x, y, z)$ — потенциал точки с координатами x, y, z . Уравнение поля для этого диэлектрика будет иметь вид:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \hat{\epsilon} \operatorname{grad} \phi = 0.$$

Переходя к дифференциальному оператору $\vec{\nabla}$, получаем:

$$\vec{\nabla} \hat{\epsilon} \vec{\nabla} \phi = 0. \quad (12.6)$$

Таким образом, для анизотропных сред уравнение поля приобретает несколько необычный вид (12.6), где $\vec{\nabla} \hat{\epsilon} \vec{\nabla}$ — дифференциальный оператор, отличный от лапласиана:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\vec{\nabla} \hat{\epsilon} \vec{\nabla} = \epsilon_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \epsilon_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (12.7)$$

Представляет интерес нахождение такой деформации (точечного преобразования пространства), чтобы каждой точке (с координатами x, y, z) рассматриваемого пространства A с анизотропными свойствами ($\hat{\epsilon}$) соответствовала

точка (с координатами x_1, y_1, z_1) деформированного пространства A_1 с изотропными свойствами (ϵ_1) и при этом

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x_1, y_1, z_1); \quad (12.8)$$

$$\epsilon \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{s} = \epsilon_1 \operatorname{grad} \varphi_1 \cdot d\vec{s}_1, \quad (12.9)$$

если эти выражения определяются для соответствующих точек и элементов поверхности (каждая точка пространства A отобразится в пространстве A_1 соответствующей точкой, а каждая эквипотенциальная поверхность — соответствующей поверхностью). Такое точечное преобразование пространства будем называть *изотропизирующей деформацией*.

Можно показать, что если выполнены условия (12.8) и (12.9), то емкости между двумя соответствующими парами поверхностей пространств A и A_1 будут одинаковы. Действительно: возьмем две поверхности s_a и s_b в пространстве A и зададим им потенциалы φ_a и φ_b . Тогда в пространстве A_1 существуют также две поверхности s_{a1} и s_{b1} , потенциалы которых в соответствии с (12.8) также равны φ_a и φ_b . Если теперь определить количество электричества внутри каждой из этих поверхностей

$$\iint_s \vec{D} \cdot d\vec{s},$$

то, как следует из условия (12.9), количества электричества на поверхностях s_a и s_{a1} и на s_b и s_{b1} между собой равны, а следовательно, равны и емкости между двумя телами, ограниченными этими поверхностями.

Найдем связь между точками пространств A и A_1 и свойства (в данном случае ϵ_1) пространства A_1 (рис. 12.1).

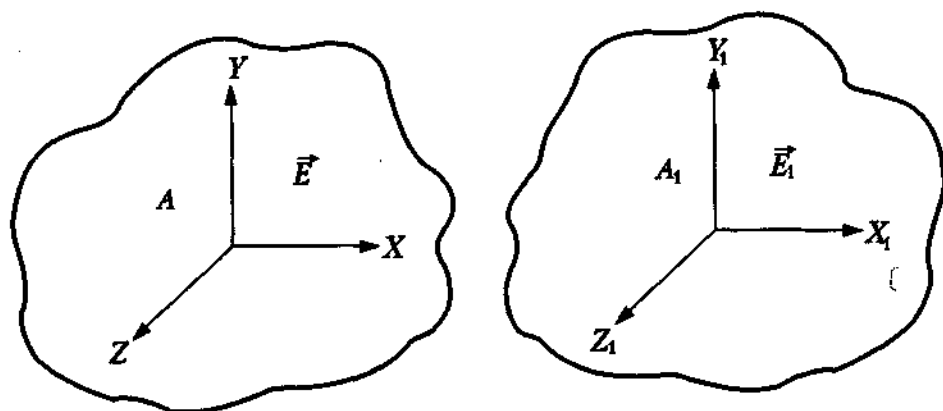


Рис. 12.1. Две пространственные системы отсчета

Для пространства A уравнение поля имеет вид:

$$\epsilon_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \epsilon_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (12.10)$$

а для пространства A_1

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} = 0. \quad (12.11)$$

Для выполнения условия (12.8) необходимо

$$x_1 = \frac{C}{\sqrt{\epsilon_x}} x; \quad y_1 = \frac{C}{\sqrt{\epsilon_y}} y; \quad z_1 = \frac{C}{\sqrt{\epsilon_z}} z, \quad (12.12)$$

где C — произвольная постоянная.

Действительно, подставляя (12.12) в уравнение (12.10), получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0.$$

Сравнивая это уравнение с (12.11), легко видеть, что при преобразовании (12.12) условие (12.8) выполнено.

Для определения ϵ_1 воспользуемся условием (12.9), выбрав $d\vec{s} = \vec{k} dx dy$, а $d\vec{s}_1 = \vec{k} dx_1 dy_1$, где $\vec{k}$ — орт оси z . Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{s} &= \epsilon_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx dy, \\ \hat{\epsilon} \operatorname{grad} \varphi_1 \cdot d\vec{s}_1 &= \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} dx_1 dy_1 = \\ &= \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\sqrt{\epsilon_z}}{C} dx dy \frac{C^2}{\sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}}. \end{aligned}$$

Полагая, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z},$$

из условия (12.9) получаем:

$$\epsilon_1 = \frac{\sqrt{\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z}}{C}. \quad (12.13)$$

Таким образом для того, чтобы определить поле в среде с прямолинейной анизотропией, достаточно произвести изотропизирующую деформацию пространства путем растяжения его вдоль каждой из осей координат в отношении, обратно пропорциональном корню квадратному из значения диэлектрической проницаемости в направлении данной оси. Полученное таким образом изотропное пространство с диэлектрической проницаемостью, определяемой по формуле (12.13), можно рассчитать обычным путем, после чего, произведя деформацию, обратную первоначальной, легко найти потенциал любой точки анизотропного материала.

В том случае, когда поле плоскопараллельно и решение задачи производится в плоскости x, y , растяжение вдоль оси z должно отсутствовать и, следовательно,

$$C = \sqrt{\epsilon_z}$$

и

$$\epsilon_1 = \sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}. \quad (12.14)$$

Так как решение этой задачи не зависит от значения ϵ_z , то последнее может быть любым и, следовательно, деформация вдоль осей x и y может производиться в любом масштабе при условии неизменности отношения коэффициентов растяжения вдоль осей x и y

$$x_1 = \frac{C}{\sqrt{\epsilon_x}} x; \quad y_1 = \frac{C}{\sqrt{\epsilon_y}} y. \quad (12.15)$$

Таким образом, для определения плоскопараллельного поля в среде с прямолинейной анизотропией следует, деформировав в соответствующем отношении плоскость, определить поле в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью, равной среднегеометрическому значению составляющих проницаемости анизотропной среды в направлениях осей анизотропии.

Среды с аксиальной анизотропией. При рассмотрении полей в материалах с аксиальной анизотропией изотропизирующая деформация пространства может быть найдена подобно тому, как это имело место при рассмотрении сред с прямолинейной анизотропией.

Условие непрерывности линии индукции так же, как и в рассмотренном ранее случае, определяется уравнением (12.6). Однако для диэлектриков с аксиальной изотропией при совпадении осей анизотропии с цилиндрическими осями координат дифференциальный оператор

$$\vec{\nabla} \hat{\epsilon} \vec{\nabla} = \epsilon_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\epsilon_\alpha}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (12.16)$$

где диэлектрическая проницаемость ϵ представляет собой тензор с диагональной матрицей, записанной в цилиндрических координатах r, α, z (12.2),

По аналогии с решением задачи в среде с прямолинейной анизотропией произведем такое преобразование координат, чтобы потенциал ϕ_1 в новой системе координат r_1, α_1, z_1 удовлетворял условиям

$$\nabla^2 \phi_1 = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z_1^2} = 0 \quad (12.17)$$

и

$$\hat{\epsilon} \text{grad } \phi \cdot d\vec{s} = \epsilon_1 \text{grad } \phi_1 d\vec{s}_1 \quad (12.18)$$

при

$$\phi_1(r_1, \alpha_1, z_1) = \phi(r, \alpha, z). \quad (12.19)$$

Ограничимся рассмотрением только плоскопараллельных полей, для которых

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (12.20)$$

и допустим, что изотропизирующая деформация может быть выражена следующим образом:

$$r_1 = k_r(r)r \text{ и } \alpha_1 = \alpha. \quad (12.21)$$

Тогда уравнения

$$r_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial r_1} + r_1 \frac{\partial^2 r}{\partial r_1^2} \right) + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial r_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (12.22)$$

и

$$\frac{\epsilon_r}{\epsilon_\alpha} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (12.23)$$

должны быть тождественны.

Приравнявая коэффициенты при соответствующих производных, получаем:

$$r_1 \frac{\partial r}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 r}{\partial r_1^2} r_1^2 = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_\alpha} r; \quad (12.24)$$

$$\left(r_1 \frac{\partial r}{\partial r_1} \right)^2 = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_\alpha} r^2. \quad (12.25)$$

Решая уравнение (12.25) относительно r_1 , получаем:

$$r_1 = C r^{\sqrt{\epsilon_\alpha/\epsilon_r}} = k_r r = C r^\beta, \quad (12.26)$$

где β — коэффициент анизотропии.

Подстановка r_1 из (12.26) в (12.24) дает тождество.

Таким образом, деформация, выражаемая уравнением (12.26), приводит к замене анизотропной среды изотропной. Величина диэлектрической проницаемости ϵ_1 получаемой при этом изотропной среды определяется из уравнения (12.19).

Если принять, что

$$\left. \begin{aligned} ds &= r d\alpha; \quad ds_1 = r_1 d\alpha = C r^\beta d\alpha, \\ \text{grad}_r \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad \text{grad}_{r_1} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{1}{C \beta r^{\beta-1}}, \end{aligned} \right\} \quad (12.27)$$

то, решая уравнение (12.19), легко получить величину ϵ_1 .

Диэлектрическая проницаемость эквивалентной изотропной среды

$$\epsilon_1 = \sqrt{\epsilon_\alpha \alpha_r}, \quad (12.28)$$

не зависит от радиуса и равна среднему геометрическому значению составляющих в радиальном и тангенциальном направлениях.

Наибольший интерес представляют плоскопараллельные поля, в которых наряду с анизотропными материалами (с прямолинейной или аксиальной анизотропией) содержатся изотропные вещества. При решении подобных задач может быть также успешно применена изотропизирующая деформация пространства.

Рассмотрим некоторые примеры применения такого преобразования пространства к решению практических задач.

Примеры расчета электрических полей

Пример 12.1. Поле двух заряженных проводов. Два цилиндрических проводника с потенциалами $+\varphi_0$ и $-\varphi_0$ находятся в анизотропной среде с диэлектрической проницаемостью

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 \\ 0 & \epsilon_y \end{pmatrix};$$

общая ось симметрии сечений двух проводов совпадает с осью x (рис. 12.2, плоскость A).

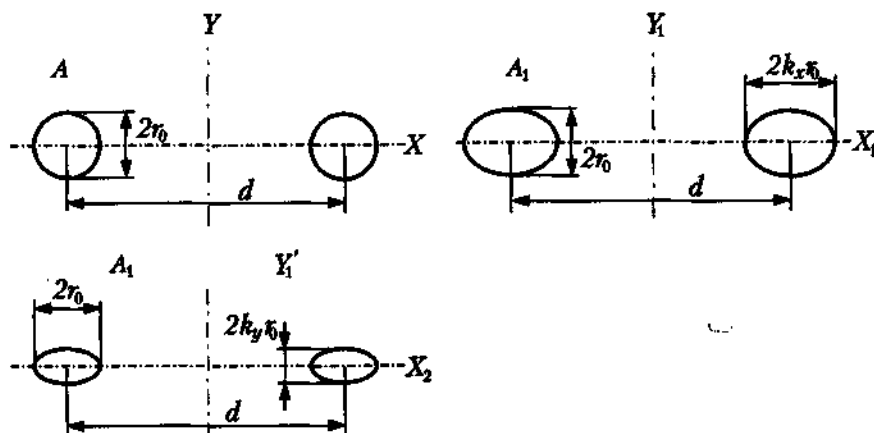


Рис. 12.2. Система двух цилиндрических проводов

Для определения ЭП произведем деформацию плоскости x, y в соответствии с условием (12.15). Величину C можно выбрать так, чтобы деформация производилась только вдоль одной из осей. Если $C = \sqrt{\epsilon_y}$, то $y_1 = y$ и деформация происходит только в направлении оси x (рис. 12.2, плоскость A_1). Если $C = \sqrt{\epsilon_x}$, наоборот, $x = x_1$, и деформация происходит только в направлении оси y (рис. 12.2, плоскость A'_1). В том случае, когда $\epsilon_y > \epsilon_x$, вдоль оси x происходит растяжение, а вдоль оси y — сжатие; если же $\epsilon_y < \epsilon_x$ — наоборот.

Допустим, что деформация происходит только в направлении оси x , тогда $C = \sqrt{\epsilon_y}$ и

$$x_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}} x, \quad (12.29)$$

а коэффициент растяжения вдоль оси x

$$k_x = \sqrt{\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}}. \quad (12.30)$$

После деформации расстояние между осями проводов увеличивается в k_x раз, а круглое сечение провода становится эллипсом с полуосями $k_x r_0$ и r_0 .

Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно определить поле двух эллиптических цилиндров с расстоянием между осями $k_x d$, находящихся в среде с $\epsilon_1 = \sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}$.

Можно показать, что в том случае, когда расстояние между осями цилиндров много больше их поперечных размеров, эллиптические цилиндры могут быть заменены равноценными круговыми цилиндрами с эквивалентным радиусом, равным среднему арифметическому значению полуосей a и b эллипса (рис. 12.3):

$$r_3 = \frac{a+b}{2}. \quad (12.31)$$

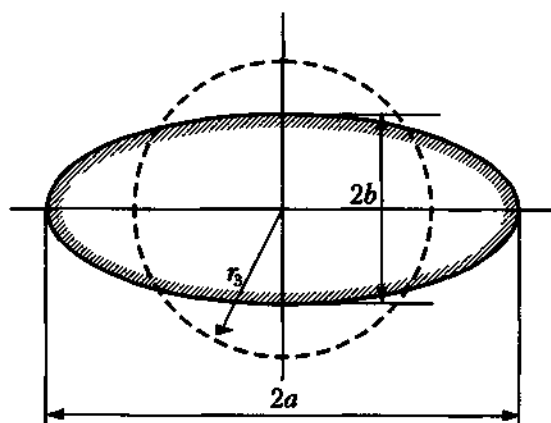


Рис. 12.3. Замена эллипса круговым цилиндром

Частным случаем введения эквивалентного радиуса для случая, когда $b = 0$, широко пользуется Оллендорф [12.8] при расчете ленточных заземлителей. При такой замене электрическое поле на расстоянии от поверхности провода больше, чем его диаметр, практически оказывается одинаковым в обоих случаях, и расчет поля можно производить так же, как и для двух заряженных осей.

Картина поля для изотропной среды представлена на рис. 12.4. В области, непосредственно примыкающей к поверхности электродов, за счет того, что эллипсы заменены эквивалентными окружностями, поле несколько отличается от поля заряженных осей; однако в остальной части плоскости поля совпадают с достаточной степенью точности.

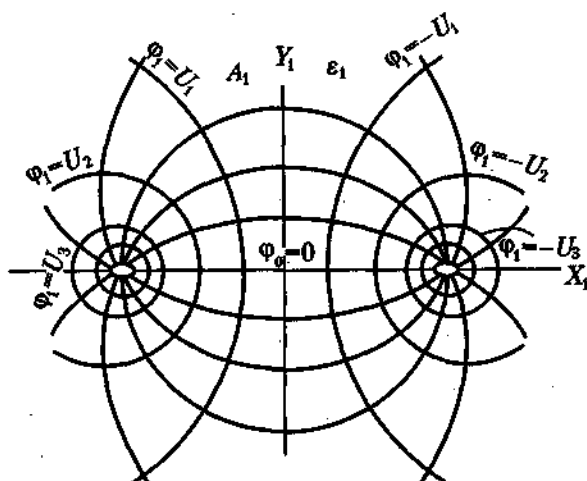


Рис. 12.4. Картина ЭП от двух проводов для изотропной среды

Если теперь совершить обратный переход от изотропной среды к анизотропной, то деформация носит обратный характер и происходит сжатие в k_x раз вдоль оси x . При такой деформации плоскости эквипотенциальные и силовые линии приобретают вид, изображенный на рис. 12.5, и это соответствует полю, реально существующему в рассматриваемом анизотропном диэлектрике.

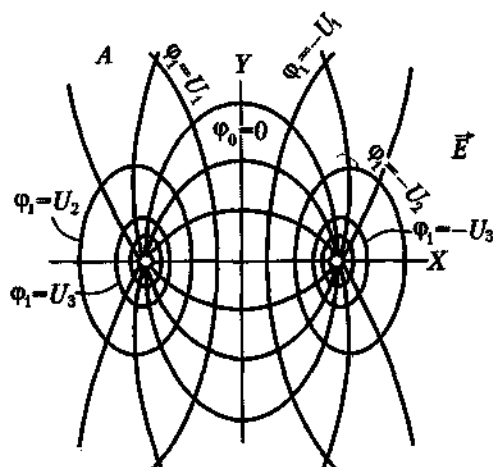


Рис. 12.5. Картина ЭП от двух проводов для анизотропной среды

Как видно из графика, в этом случае линии электрического смещения могут составлять с эквипотенциалами угол, значительно отличающийся от 90° . Это естественно, так как вектор смещения $\vec{D}$ может не совпадать по направлению с напряженностью электрического поля $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$.

Так как емкость между проводами при преобразовании пространства не меняется, то легко подсчитать емкость, приходящуюся на единицу длины провода:

$$C_0 = \frac{\pi \epsilon_1}{\ln \frac{2k_x d}{r_0(1+k_x)}}$$

(предполагается, что расстояние между проводами много больше их диаметра).

Выразив k_x и ϵ_1 через параметры анизотропного диэлектрика, получаем:

$$C_0 = \frac{\pi \sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}}{\ln \frac{2d \sqrt{\epsilon_y}}{r_0 (\sqrt{\epsilon_x} + \sqrt{\epsilon_y})}}. \quad (12.32)$$

В том случае, когда оси анизотропии материала не совпадают с осями симметрии пары проводов, деформация носит характер, представленный на рис. 12.6. При деформации вдоль оси x расстояние между осями проводов принимает следующее значение:

$$d_1 = d \sqrt{1 + \frac{\epsilon_y - \epsilon_x}{\epsilon_x} \cos^2 \alpha},$$

где α — угол между совместной осью двух проводов и осью деформации.

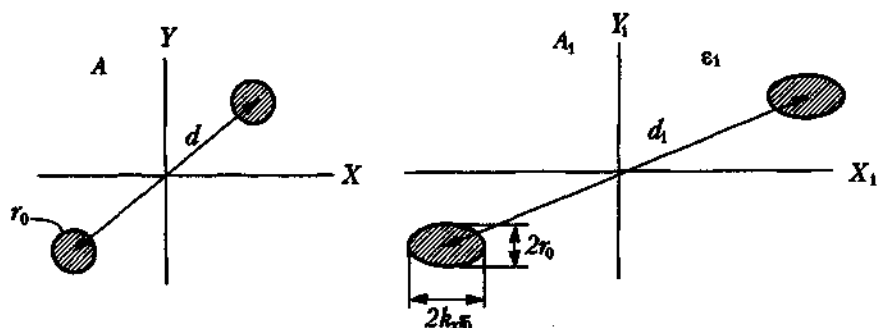


Рис. 12.6. Картина ЭП от двух проводов для анизотропной среды при несовпадении осей симметрии пары проводов

Емкость единицы длины пары проводов в этом случае

$$C_0 = \frac{\pi \sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}}{\ln \frac{2d \sqrt{\epsilon_y \sin^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \alpha}}{r_0 (\sqrt{\epsilon_x} + \sqrt{\epsilon_y})}}. \quad (12.33)$$

Пример 12.2. Анизотропный цилиндр в электрическом поле. Рассмотрим цилиндр радиуса r_0 из материала с аксиальной анизотропией в ЭП, направленном перпендикулярно его оси. В этом случае изотропизирующее преобразование координат сводится к радиальной деформации внутренних слоев цилиндра [12.4], выражаемой следующим преобразованием координат:

$$r_1 = r_0^{1-\beta} r^\beta, \quad (12.34)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_r}}. \quad (16.35)$$

Рассматриваемое изотропизирующее преобразование координат применимо при любом внешнем плоскопараллельном поле, направленном перпендикулярно оси цилиндра.

Пример 12.3. Анизотропный шар в электрическом поле. Расчет поля шара со сферической анизотропией во внешнем однородном поле может быть также произведен с помощью изотропизирующего преобразования координат. В этом случае преобразование выражается аналогично (12.34) [12.7]

$$R_1 = R_0^{1-\beta} R^\beta, \quad (12.36)$$

а ϵ_r и ϵ_α — диэлектрическая проницаемость в направлении радиуса и перпендикулярно к нему.

Электрическое поле внутри сферы носит такой же характер, как и в цилиндре.

Совершенно аналогично решается задача и для эллипсоида вращения с эллипсоидальной анизотропией [12.7].

Кроме рассмотренных примеров может представить интерес рассмотрение стационарных электрических и связанных с ними гидродинамических полей в грунтах при электроосмотическом воздействии на эти грунты [12.5, 12.6, 12.9].

12.2.2. Расчеты магнитных полей

Для расчета ферромагнитных сердечников, свитых из изотропной ленты, но имеющих различную среднюю магнитную проницаемость вдоль и поперек витков или свитых из анизотропной ленты, имеющей оси анизотропии, не совпадающие с осью ленты, важно уметь рассчитывать значение эффективной магнитной проницаемости вдоль средней линии тороида.

Определению эффективной магнитной проницаемости такого сердечника посвящена работа [12.10].

Для этого случая необходимо учитывать размагничивающее действие боковых краев ленты и поперечный магнитный поток, замыкающийся через воздух между краями ленты.

Эта задача может быть решена путем преобразования, выражаемого умножением на тензор $\hat{A}$.

Рассмотрим анизотропную ферромагнитную (с магнитной проницаемостью $\hat{\mu}$) пластину, находящуюся в МП с напряженностью H_ξ катушки, направленном по оси ξ (рис. 12.7, а)

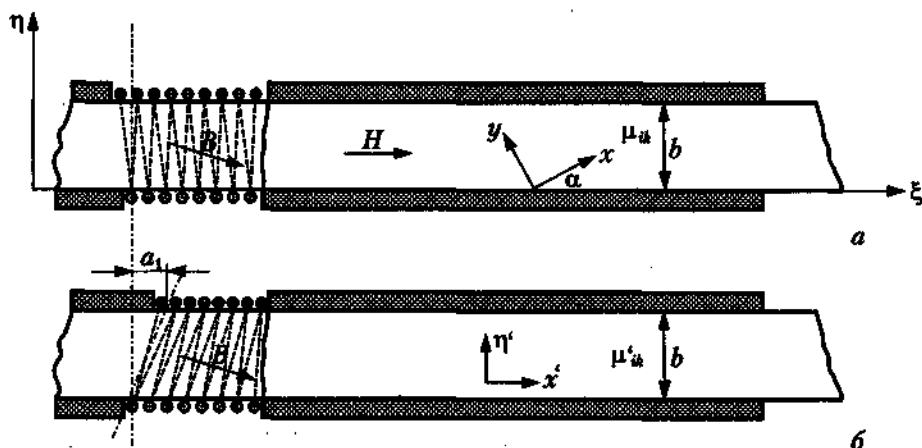


Рис. 12.7. К расчету магнитного поля в анизотропной пластине: а — анизотропная исходная задача; б — преобразованная анизотропная задача

Эффективная магнитная проницаемость пластины может быть выражена через магнитный поток, сцепленный с одним витком, следующим образом:

$$\mu_\vartheta = \frac{\Phi_0}{b H_\xi}. \quad (12.37)$$

Здесь Φ_0 — магнитный поток, приходящийся на единицу длины витка в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа.

Для расчета магнитного потока Φ_0 удобно произвести преобразование, соответствующее сдвигу по оси ξ (умножение на тензор $\hat{A}$). Получаем преобразованную задачу, в которой оси анизотропии пластины совпадают с осями пластины η' и ξ' , но намотка катушки становится косою (рис. 12.7, б).

Если в первоначальной задаче

$$\hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{vmatrix}, \quad (12.38)$$

то теперь

$$\hat{\mu}' = \begin{vmatrix} \mu_{\xi'} & 0 \\ 0 & \mu_{\eta'} \end{vmatrix}, \quad (12.39)$$

где

$$\mu_{\xi'} = \frac{\mu_x \mu_y}{\mu_x \sin^2 \alpha + \mu_y \cos^2 \alpha},$$

$$a \quad \mu_{\eta} = \mu_{\eta'} = \mu_x \sin^2 \alpha + \mu_y \cos^2 \alpha. \quad (12.40)$$

Величина сдвига a_1 выражается следующим образом:

$$a_1 = a_{\zeta\eta} b = \frac{\mu_y - \mu_x}{\mu_x \operatorname{tg} \alpha + \mu_y \operatorname{ctg} \alpha} \cdot b. \quad (12.41)$$

Определяя поток Φ_0 как сумму двух составляющих, соответствующих сечениям, перпендикулярным осям ξ и η , получаем

$$\Phi_{\xi} = H_{\xi} \mu_{\xi} b, \quad (12.42)$$

$$\Phi_{\eta} = H_{\xi} \frac{a_1^2}{b} \mu_{\eta'} \frac{1}{1 + (\mu_{\eta'} - 1) N_{\eta}}. \quad (12.43)$$

Здесь N_{η} — размагничивающий фактор пластины при ее намагничивании в направлении оси η .

Выражая Φ_0 через Φ_{ξ} и Φ_{η} и подставляя в (12.37), находим

$$\mu_{\vartheta} = \mu_{\xi'} + \frac{a_{\zeta\eta} \mu_{\eta'}}{1 + (\mu_{\eta'} - 1) N_{\eta}}. \quad (12.44)$$

Путем несложных преобразований это выражение может быть сведено к формуле, полученной в [12.10] для $\mu_{\eta'} \gg 1$.

При $\Phi_{\xi} \gg \Phi_{\eta}$ формула (12.44) приобретает более простой вид [12.11]:

$$\mu_{\vartheta} = \mu_{\xi'} = \frac{\mu_x \mu_y}{\mu_{\eta}}. \quad (12.45)$$

12.3. Квазистатические электрические и магнитные поля

Если длина электромагнитной волны в материале много больше, чем его размеры в направлении, перпендикулярном векторам $\vec{E}$ и $\vec{H}$, то материал можно считать прозрачным для электромагнитной волны и пользоваться уравнением (12.5).

Однако теперь уже в качестве тензора диэлектрической и магнитной проницаемостей необходимо вводить комплексные величины.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\epsilon} &= \hat{\epsilon}' - j\hat{\epsilon}'' \\ \hat{\gamma} &= \hat{\gamma}' - j\hat{\gamma}'' \\ \hat{\mu} &= \hat{\mu}' - j\hat{\mu}'' \end{aligned} \right\}. \quad (12.46)$$

Так как комплексные векторы эквивалентного смещения $\vec{D}$ и полной плотности тока $\vec{\delta}$ связаны между собой [12.11] соотношением

$$\dot{\vec{\delta}} = j\omega\dot{\vec{D}}, \quad (12.47)$$

то между полными эквивалентными комплексными проводимостью и диэлектрической проницаемостью выполняется зависимость

$$\hat{\gamma} = j\omega\hat{\epsilon}. \quad (12.48)$$

При подстановке вместо вещественных значений $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$ соответствующих комплексных величин для расчета квазистационарных полей в анизотропных средах полностью могут быть применены все выводы, сделанные для стационарных полей.

Точно так же по формуле (12.44) может быть найдено значение комплексной магнитной проницаемости в направлении намагничивания листа. Последнее справедливо в тех случаях, когда можно пренебречь различием в потерях на гистерезис при поступательном и вращательном перемагничиваниях.

Анизотропия свойств материала при несовпадении направления внешнего поля ни с одной из осей анизотропии приводит к возникновению эллиптического вращающегося поля. Наличие такого поля имеет существенное значение при измерении магнитных свойств электротехнической стали на целых листах [12.12].

Рассмотрение изотропизирующих преобразований для сред с комплексными параметрами позволило предложить [12.13–12.14] метод измерения свойств анизотропных диэлектриков в полях высокой частоты.

При измерении средней комплексной диэлектрической проницаемости материалов с волокнистой или слоистой структурой (бумага, пряжа, волокно) бывает очень просто измерить ее в поперечном направлении ($\hat{\epsilon}_y$) и встречает затруднение измерение вдоль волокон ($\hat{\epsilon}_x$), так как трудно осуществить конденсатор, в котором ЭП было бы направлено вдоль волокон исследуемого материала.

Значительно проще произвести измерение Z -комплексного сопротивления конденсатора в виде двух параллельных ленточных электродов, уложенных в плоскости разъема двух слоев кипы исследуемого материала. Зная геометрическую емкость C двух таких лент, легко рассчитать среднее геометрическое значение диэлектрической проницаемости в направлениях вдоль волокна (x) и поперек (y).

$$\sqrt{\hat{\epsilon}_x \hat{\epsilon}_y} = \frac{1}{j\omega C_0 Z}. \quad (12.49)$$

На основании двух измерений определяется значение $\hat{\epsilon}_y$.

С помощью аналогичных приемов могут быть измерены параметры материалов с аксиальной анизотропией [12.14].

Изучение квазистационарных ЭП и МП в анизотропных поглощающих средах имеет большое значение для решения задач магнитной техники [12.15] и техники высокочастотного нагрева диэлектриков и полупроводников [12.16].

12.4. Волновые процессы в средах со структурной анизотропией

При длине волны в рассматриваемом материале такого же порядка, что и размеры материала, уже нельзя пользоваться уравнением (12.5) и перестают быть справедливы все сделанные на основании этого уравнения выводы.

Однако и в этом случае при расчете полей в анизотропной среде может быть применено изотропизирующее преобразование.

Таким примером может быть расчет поля прямоугольного стержня, в продольном МП, синусоидально изменяющемся во времени [12.17].

Совместное решение уравнений Максвелла в комплексной форме для анизотропного стержня (рис. 12.8, а) имеет вид

$$\gamma_x \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \gamma_y \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} = j\omega\mu_z \gamma_x \gamma_y \dot{H}_z. \quad (12.50)$$

Изотропизирующее преобразование $x_1 = x$, $y_1 = y\sqrt{\gamma_x/\gamma_y}$ приводит это уравнение к изотропному виду. Соответственно в координатах x_1, y_1 стержень приобретает деформированный вид (рис 12.8, б).

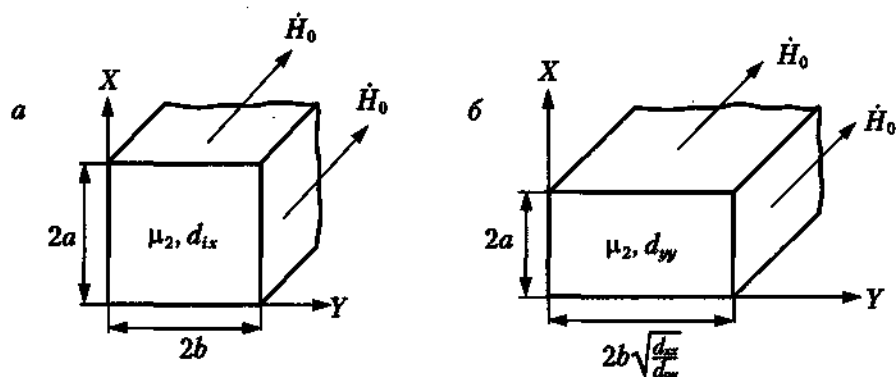


Рис. 12.8. К расчету электромагнитного поля в анизотропном стержне:
а — анизотропная исходная задача; б — преобразованная анизотропная задача

Применяя для расчета поверхностного эффекта в прямоугольном изотропном стержне известное выражение, получаем для средней комплексной магнитной проницаемости стержня следующую формулу:

$$\mu_{ср.эф} = \mu_z \left[1 - \frac{64}{\pi^4} \sum_{m,n} \frac{1}{m^2 n^2} \frac{j\omega\mu_z \gamma_x \gamma_y}{j\omega\mu_z \gamma_x \gamma_y + \gamma_x \left(\frac{\pi m}{2a}\right)^2 + \gamma_y \left(\frac{\pi n}{2b}\right)^2} \right]. \quad (12.51)$$

Разумеется, эта формула применима как при вещественных μ и γ , так и при комплексных и дает возможность судить о дисперсии магнитной проницаемости.

Несколько сложнее расчет средней магнитной проницаемости при микроструктурной анизотропии, когда стальной сердечник набран из изолированных одна от другой стальных пластин и необходимо учесть волновой характер распределения поля в пределах каждой пластины и вдоль слоя электрической изоляции. Этот вопрос исследован как для установившегося процесса в линейной среде [12.18, 12.19], так и для неустановившегося процесса в нелинейной среде [12.18].

12.5. Расчет анизотропных экранов

12.5.1. Сферические экраны

Пример 12.4. Многослойный сферический экран [12.20].

Для диполя в отсутствие экрана имеем:

$$U(r) = \sum_{n=0}^{\infty} [U_n(\vec{r})]_B + \sum_{n=0}^{\infty} [U_n(\vec{r})]_r, \quad (12.52)$$

где индекс B означает «вертикальный», а r — «горизонтальный».

$$[U_n(\vec{r})]_B = -m_B(n+1) \frac{r^n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta), \quad (a > r), \quad (12.53)$$

$$[U_n(\vec{r})]_r = -m_r \sin \varphi \frac{r^n}{a^{n+2}} P_n^1(\cos \theta), \quad (a > r), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12.54)$$

$$\vec{m} = m_B \cdot \vec{n}_{0Z} + m_r \cdot \vec{n}_{0Y},$$

где (r, θ, φ) — сферические координаты; $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра; $P_n^1(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра.

В результате решения задачи для скалярного магнитного потенциала поля в полости экрана ($r < R_0$, R_0 — радиус внутренней полости экрана) получаем формулу

$$U_i(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \{ [U_n(\vec{r})]_B + [U_n(\vec{r})]_r \} = S_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{S_1} \{ [U_n(\vec{r})]_B + [U_n(\vec{r})]_r \}, \quad (12.55)$$

где S_0, S_n — «коэффициенты экранирования» n -й гармоники поля; термин ставится в кавычки, так как он имеет буквальный смысл лишь по отношению к первой ($n=1$) гармонике поля, соответствующей здесь однородному полю внешней помехи.

Поскольку скалярный магнитный потенциал определяется с точностью до постоянного (не зависящего от координат) слагаемого, коэффициент S_0 можно положить равным нулю. Соотношения для величин S_n ($n = 1, 2, \dots$) являются обобщением известных соотношений Г. Кадена [12.6] для коэффициентов экранирования и реакций обратного действия трехслойного экрана в случае, когда источник смещен из центра экрана, скалярный магнитный потенциал которого описывается формулами (12.52–12.54):

$$S_n = \frac{(S_1)_n (S_3)_n}{1 - l_2^{2n+1} (W_1^{(a)})_n (W_3^{(i)})_n}, \quad (12.56)$$

$$W_n^{(a)} = (W_3^{(a)})_n + \frac{S_n (S_3)_n}{(S_1)_n} (W_1^{(a)})_n \left(\frac{R_{a_1}}{R_{a_3}} \right)^{2n+1}, \quad (12.57)$$

$$W_n^{(i)} = (W_1^{(i)})_n + \frac{S_n (S_1)_n}{(S_3)_n} (W_3^{(i)})_n \left(\frac{R_{i_1}}{R_{i_3}} \right)^{2n+1}. \quad (12.58)$$

Индексы (i) и (a) указывают на внутреннюю и внешнюю реакции; $W_n^{(i)}$ и $W_n^{(a)}$ — «коэффициенты обратного действия» трехслойного экрана; $(S_1)_n$, $(S_3)_n$ — «коэффициенты экранирования» первого и третьего (с $\mu_r \neq 1$) слоев.

$$(S_1)_n = \left[1 + \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} (\mu_r - 1)(1 - \mu_r^{-1})(1 - l_1^{2n+1}) \right]^{-1}, \quad (12.59)$$

$$(S_3)_n = \left[1 + \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} (\mu_r - 1)(1 - \mu_r^{-1})(1 - l_3^{2n+1}) \right]^{-1}, \quad (12.60)$$

где $(W_1^{(i)})_n$, $(W_1^{(a)})_n$, $(W_3^{(i)})_n$, $(W_3^{(a)})_n$ — «коэффициенты обратного действия» (внутренний и внешний) первого и третьего слоев.

$$\left\{ \begin{array}{l} (W_1^{(i)})_n \\ (W_1^{(a)})_n \end{array} \right\} = - \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} (S_1)_n (\mu_r - 1)(1 - l_1^{2n+1}) \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{n+1}{n\mu_r} \right) \\ \left(1 + \frac{n}{(n+1)\mu_r} \right) \end{array} \right\} \quad (12.61)$$

(чтобы получить формулы для $(W_3^{(i)})_n$ и $(W_3^{(a)})_n$, нужно в (12.61) заменить $(S_1)_n$ на $(S_3)_n$ и l_1 на l_3),

$$l_1 = R_0/R_{a_1}, \quad l_2 = R_2/R_{a_2}, \quad l_3 = R_2/R_{a_3}.$$

Взяв за основу формулы (12.56–12.58) для «коэффициента экранирования» и «реакций обратного действия» трехслойного экрана, рассматриваем оболочку, содержащую N ферромагнитных слоев, разделенных немагнитными промежутками, как трехслойную (первый слой — подсистема, состоящая из $(N-1)$ слоев, второй слой — немагнитный материал толщиной d_H , а третий — магнитный материал толщиной d_M (рис. 12.9)). Получаем следующие рекуррентные соотношения, позволяющие найти «коэффициент экранирования» n -й гармоники поля и «реакции обратного действия» N -слойного экрана через «коэффициент экранирования» и «реакции обратного действия» $(N-1)$ -слойного экрана:

$$S_{n,N} = \frac{S_{n,N-1} S_{n,M}}{1 - \left(\frac{R_N}{R_N + d_H} \right)^{2n+1} W_{n,N-1}^{(a)} W_{n,M}^{(i)}}, \quad (12.62)$$

$$W_{n,N}^{(a)} = W_{n,M}^{(a)} + W_{n,N-1}^{(a)} \frac{S_{n,N} S_{n,M}}{S_{n,N-1}} \left(\frac{R_N}{R_N + d_H + d_M} \right)^{2n+1}. \quad (12.63)$$

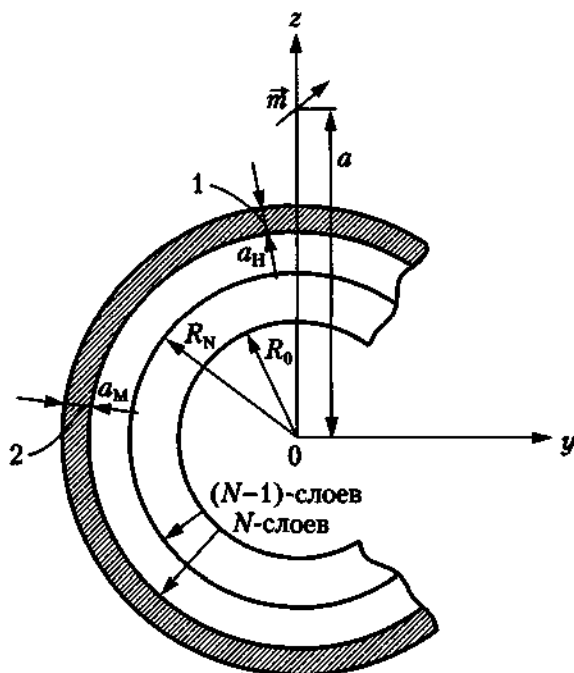


Рис. 12.9. Многослойный сферический экран

Выражения для $S_{n,M}$ и $W_{n,M}^{(i)}$, $W_{n,M}^{(a)}$ можно получить из формул (12.59–12.61), если заменить в них l_1 на $\left(\frac{R_N + d_H}{R_N + d_H + d_M} \right)$ и, кроме того, в (12.59) заменить $(S_1)_n$ на $S_{n,M}$; индекс «M» в (12.62), (12.63) обозначает принадлежность к магнитному слою; d_M и d_H — толщины магнитного и немагнитного слоев экрана; R_N — внешний радиус внутренней оболочки, содержащей $(N-1)$ -слоев ферромагнетика:

$$R_N = R_0 + d_M + (N-2)(d_H + d_M).$$

Соотношение (12.55) показывает, каким образом проявляется влияние экрана на амплитуду n -й пространственной гармоники поля в полости экрана. Существенно, что для полей с малой относительной неоднородностью, когда можно ограничиться несколькими первыми пространственными гармониками потенциала ($n \leq n_{\max}$, где $n_{\max} \approx 3-10$), отношение S_n/S_1 быстро убывает с ростом номера n .

Для составляющих напряженности МП в полости экрана $H_{\alpha_j}^{(i)}$ при этом можно записать:

$$H_{\alpha_j}^{(i)} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \alpha_j} = S_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{S_1} \frac{1}{h_j} \frac{\partial U_n}{\partial \alpha_j} = S_1 \left[\frac{\partial U_1}{h_j \partial \alpha_j} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n}{S_1} \frac{1}{h_j} \frac{\partial U_n}{\partial \alpha_j} \right], \quad (12.64)$$

где индекс (12.52) указывает на внутреннюю полость экрана; $j=1, 2, 3$; $\alpha_1 = r$; $\alpha_2 = \theta$; $\alpha_3 = \varphi$; $h_1 = 1$; $h_2 = r$; $h_3 = r \sin \theta$, первая гармоника ($n=1$), выделенная в (12.64) в отдельное слагаемое, при этом соответствует однородному полю, вторая ($n=2$) — дипольному и т. д.

Пример 12.5. Подавление высших пространственных гармоник поля внешней помехи анизотропным сферическим экраном. Для рассматриваемого магнитостатического режима экранирования многослойная оболочка (рис. 12.9) из чередующихся весьма тонких ферромагнитных и немагнитных слоев в пределе, когда толщина отдельного слоя стремится к нулю при сохранении общей толщины оболочки, фиксированной ($T = \text{const}$, $d_M + d_N \rightarrow 0$, $d_M/d_N = \text{const}$), может рассматриваться как сплошная анизотропная среда с тензором относительной магнитной проницаемости

$$\mu_{ij} = \frac{\partial B_i}{\partial H_j} = \begin{bmatrix} \mu_n & 0 & 0 \\ 0 & \mu_t & 0 \\ 0 & 0 & \mu_t \end{bmatrix}. \quad (12.65)$$

Здесь $i, j=1$ соответствует радиальной координате; $i, j=2$ и $i, j=3$ — полярной и азимутальной угловым координатам соответственно (n и t — индексы нормального и тангенциального направлений к поверхности сферического слоя).

Исходя из «микроструктуры» рассматриваемого экрана, имеем

$$\mu_t \approx \mu_0 \mu_r \frac{d_M}{d_N + d_M}, \quad \mu_n \approx \mu_0. \quad (12.66)$$

Рассмотрение такой модели «предельно тонкостенного» экрана позволяет довести до конца аналитическое решение задачи о подавлении высших пространственных гармоник поля внешнего дипольного источника помехи экраном и получить предельные характеристики подавления высших гармоник поля многослойным сферическим экраном в режиме магнитостатики.

В качестве источника МП выступает электрический диполь, ориентированный в радиальном направлении.

Задача определения S_n сводится к решению уравнений Максвелла в режиме магнитостатики в отсутствие токов в магнитной среде

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (12.67)$$

когда анизотропным магнетиком занята область пространства $R_0 < r < R_a$, где $R_a = R_0 + T$ — внешний радиус экрана, и к удовлетворению граничным условиям на поверхностях оболочки (непрерывность скалярных магнитных потенциалов и нормальных составляющих векторов магнитной индукции).

Вводя в (12.67) скалярный магнитный потенциал $\vec{H} = \text{grad } U$, получаем

$$\text{div}(\mu \text{ grad } U) = 0, \quad (12.68)$$

где скалярный магнитный потенциал первичного поля магнитного диполя определяется по формуле

$$U = -\frac{1}{4\pi\mu_r} \vec{M} \text{ grad} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \mu_r = \mu / \mu_0, \quad (12.69)$$

где r — расстояние от центра диполя до точки наблюдения.

Уравнение (12.68) для областей внутри сферы и вне сферы

$$\Delta U = 0. \quad (12.70)$$

Решение (12.70) для областей внутри и вне сферы имеет вид:

$$U_i = -\frac{m}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) S_n \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta), \quad r < R_0, \quad (12.71)$$

$$U_a = -\frac{m}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) - \frac{m}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R_a}{a} \right)^n \left(\frac{R_a}{r} \right)^{n+1} W_n P_n(\cos \theta),$$

$$r > R_a,$$

где S_n, W_n — неизвестные коэффициенты.

12.5.2. Круговые цилиндрические экраны

Пример 12.6. Расчет эффективности экранирования однородного гармонического МП анизотропным круговым цилиндрическим экраном. Требуется рассчитать эффективность экранирования переменного гармонического МП круговым цилиндрическим экраном, магнитная проницаемость материала которого является анизотропной. Поперечное сечение цилиндра представлено на рис. 12.10, а. Считается, что цилиндр бесконечно длинный, внешнее МП с напряженностью $\vec{H}_0$ (здесь и в дальнейшем используется символическая форма записи величин МП) приложено перпендикулярно образующей цилиндра. Поэтому задачу достаточно рассмотреть в поперечном сечении в полярной системе координат (r, α) . Магнитная проницаемость μ материала экрана (область III)

меняется по двум координатам (r, α) — $\hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_r \\ \mu_\alpha \end{vmatrix}$. Электрический потенциал ϕ_0

внешнего поля может быть выражен в виде (рис. 12.10, б):

$$\dot{\phi}_0 = -\dot{H}_0 r \cos \alpha = \dot{f}_0(r) \cos \alpha,$$

откуда

$$\dot{H}_\alpha = \dot{H}_0 \cos \alpha = -\frac{\partial \dot{\phi}_0}{\partial r}; \quad \dot{H}_r = -\dot{H}_0 \sin \alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\phi}_0}{\partial \alpha}.$$

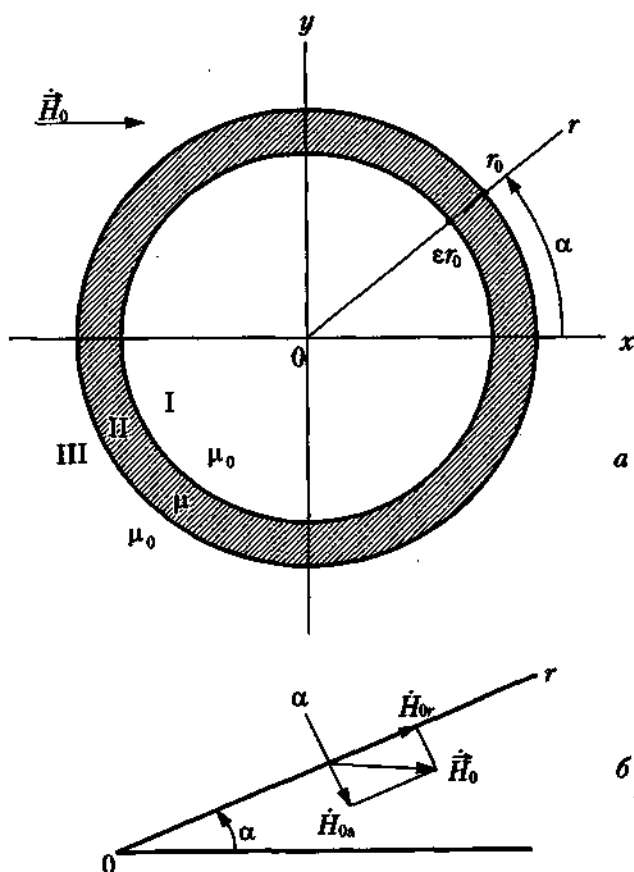


Рис. 12.10. Однослойный круговой цилиндрический экран с диагональной анизотропией материала

Свяжем с центром цилиндра декартовую систему координат (x, y, z) (рис. 12.10, а), ось z направлена по оси цилиндра. При расчете учитываются три области: I — в полости цилиндра, в воздушной среде с магнитной проницаемостью $\mu_0 = \text{const}$; II — в материале цилиндрического экрана с магнитной напряженностью μ ; III — область вне экрана, среда воздушная с магнитной проницаемостью $\mu_0 = \text{const}$.

Решению подлежат следующие уравнения:

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E}, \quad (12.72)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B}, \quad (12.73)$$

где $\vec{B}$ — индукция МП.

Ротор напряженности $\text{rot } \vec{E}$ расписывается в виде:

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{e}_r \text{rot}_r \vec{E} + \vec{e}_\alpha \text{rot}_\alpha \vec{E} + \vec{e}_z \text{rot}_z \vec{E},$$

а вектор индукции $\vec{B}$ — в виде:

$$\vec{B} = \vec{e}_r \vec{B}_r + \vec{e}_\alpha \vec{B}_\alpha + \vec{e}_z \vec{B}_z. \quad (12.74)$$

В областях распространения переменное МП имеет следующие составляющие:

$$\begin{aligned} \text{I. } \{0, \vec{B}_I\} &= \{\vec{B}_n, \vec{B}_\omega\}; & \text{II. } \{\vec{E}_n, \vec{B}_n\} &= \{\vec{E}_n \equiv \vec{E}, \vec{B}_r, \vec{B}_\alpha\}; \\ \text{III. } \{0, \vec{B}_{III}\} &= \{\vec{B}_{nn}, \vec{B}_{nn}\}. \end{aligned}$$

Из уравнения (12.73) имеем:

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \vec{E} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial \vec{E}_\alpha}{\partial z} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \alpha}; & \text{rot}_\alpha \vec{E} &= \frac{\partial \vec{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial r} \equiv -\frac{\partial \vec{E}}{\partial r}; \\ \text{rot}_z \vec{E} &= \frac{1}{r} \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}_\alpha}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}_r}{\partial \alpha} \equiv 0. \end{aligned}$$

Из уравнений (12.72), (12.73) получим:

$$-j\omega \vec{B}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \alpha}; \quad \vec{H}_r = -\frac{1}{j\omega \mu_r} \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \alpha}; \quad (12.75)$$

$$-j\omega \vec{B}_\alpha = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial r}; \quad \vec{H}_\alpha = \frac{1}{j\omega \mu_\alpha} \frac{\partial \vec{E}}{\partial r}. \quad (12.76)$$

Ротор напряженности переменного МП ($\text{rot} \vec{H}$) может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \vec{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial \vec{H}_\alpha}{\partial z} \right) + \vec{e}_\alpha \left(\frac{\partial \vec{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial r} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{1}{r} \vec{H}_\alpha + \frac{\partial \vec{H}_\alpha}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{H}_r}{\partial \alpha} \right) = \\ &= \gamma \vec{e}_r \vec{E} + \gamma \vec{e}_\alpha \vec{E}_\alpha + \gamma \vec{e}_z \vec{E}_z; \quad \vec{E}_z = \vec{E} \neq 0; \quad \vec{E}_\alpha, \vec{E}_r \equiv 0. \end{aligned}$$

Учитывая (12.74–12.76), для уравнения (12.72) получим:

$$\frac{1}{r} \vec{H}_\alpha + \frac{\partial \vec{H}_\alpha}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{H}_r}{\partial \alpha} = \gamma \vec{E}. \quad (12.77)$$

Подставляем (12.72), (12.73) в (12.77):

$$r^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial r^2} + r \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} + M^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \alpha^2} - r^2 k_\alpha^2 \vec{E} = 0,$$

где $M = \sqrt{\mu_\alpha / \mu_r}$; $k_\alpha = \sqrt{j\gamma\omega\mu_\alpha}$.

Если учесть, что $\vec{E}_n = f(r) \cos \alpha$, то

$$r^2 f''(r) + rf'(r) - (M^2 + r^2 k_\alpha^2) f(r) = 0. \quad (12.78)$$

Если считать, что оболочка тонкая, т. е. $r \cong r_0$, то

$$\begin{aligned} \beta^2 &= M^2 + r_0^2 k_\alpha^2, \quad \beta^2 > 0, \\ r^2 f''(r) + r f'(r) - \beta^2 f(r) &= 0, \\ f(r) &= \dot{C}_H \left(\frac{r}{r_0} \right)^\beta + \dot{G}_H \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\beta}, \\ \dot{E}_H &= \left[\dot{C}_H \left(\frac{r}{r_0} \right)^\beta + \dot{G}_H \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\beta} \right] \cos \alpha, \\ \dot{H}_H &= \frac{1}{j\omega\mu_r} \frac{1}{r} \left[\dot{C}_H \left(\frac{r}{r_0} \right)^\beta + \dot{G}_H \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\beta} \right] \sin \alpha, \\ \dot{H}_{aH} &= \frac{1}{j\omega\mu_\alpha} \frac{1}{r} \left[\frac{\beta}{r_0} \dot{C}_H \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\beta-1} - \frac{\beta}{r_0} \dot{G}_H \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\beta-1} \right] \cos \alpha, \\ \dot{\phi}_I &= \dot{C}_I \left(\frac{r}{r_0} \right) \cos \alpha, \quad \dot{\phi}_{IH} = \left[\dot{G}_{IH} \left(\frac{r_0}{r} \right) - \dot{H}_0 r \right] \cos \alpha, \\ \dot{H}_H &= -\frac{1}{r_0} \dot{C}_I \cos \alpha, \quad \dot{H}_{aH} = \frac{1}{r} \dot{C}_I \left(\frac{r}{r_0} \right) \sin \alpha, \\ \dot{H}_{rH} &= \left[\dot{G}_{IH} \left(\frac{1}{r_0} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + \dot{H}_0 \right] \cos \alpha, \\ \dot{H}_{aIH} &= \frac{1}{r} \left[\dot{G}_{IH} \left(\frac{r_0}{r} \right) - \dot{H}_0 r \right] \sin \alpha. \end{aligned} \quad (12.79)$$

Сопряжение решений между областями осуществляется при $r = r_0$ и $r = \varepsilon r_0$:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{rH} \Big|_{r=r_0} &= \mu_r^* \dot{H}_{rH} \Big|_{r=r_0}, \quad \mu_r^* \dot{H}_{rH} \Big|_{r=\varepsilon r_0} = \dot{H}_{rH} \Big|_{r=\varepsilon r_0}, \\ \dot{H}_{aIH} \Big|_{r=r_0} &= \dot{H}_{aIH} \Big|_{r=r_0}, \quad \dot{H}_{aIH} \Big|_{r=\varepsilon r_0} = \dot{H}_{aIH} \Big|_{r=\varepsilon r_0}, \end{aligned} \quad (12.80)$$

где $\mu_r^* = \mu_r / \mu_0$.

Подстановка (12.79) в (12.80) приводит к системе уравнений для определения $\dot{C}_I, \dot{C}_H, \dot{G}_H, \dot{G}_{IH}$:

$$-\frac{1}{r_0} (\dot{G}_{IH} - \dot{H}_0 r_0) = \frac{1}{j\omega\mu_0 r_0} (\dot{C}_H + \dot{G}_H), \quad (12.81)$$

$$\frac{1}{r_0} (\dot{G}_{IH} - \dot{H}_0 r_0) = \frac{1}{j\omega\mu_\alpha} \left(\frac{\beta}{r_0} \dot{C}_H - \frac{\beta}{r_0} \dot{G}_H \right), \quad (12.82)$$

$$\frac{1}{r_0 \epsilon} \dot{C}_1 \epsilon = \frac{1}{j \omega \mu_\alpha} \left[\frac{\beta}{r_0} \dot{C}_H \epsilon^{\beta-1} - \frac{\beta}{r_0} \dot{C}_H \epsilon^{-\beta-1} \right], \quad (12.83)$$

$$\frac{1}{j \omega \mu_0 \epsilon} (\dot{C}_H \epsilon^\beta + \dot{C}_H \epsilon^{-\beta}) = \dot{C}_I.$$

Коэффициент экранирования K^H получается в виде:

$$K^H = \frac{\dot{H}_I}{\dot{H}_0} = \frac{4\beta * \epsilon^{\beta-1}}{(\beta^* + 1)^2 - (\beta^* - 1)^2 \epsilon^{2\beta}}, \quad (12.84)$$

а эффективность экранирования S^H :

$$S^H = \frac{(\beta^* + 1)^2 - (\beta^* - 1)^2 \epsilon^{2\beta}}{4\beta^* \epsilon^{\beta-1}}. \quad (12.85)$$

При снижении частоты переменного МП ($\omega = \text{const}$):

$$\beta = \sqrt{M^2 + r_0^2 k_\alpha^2} \rightarrow M, \quad \beta^* = \frac{\beta}{\mu_\alpha^*} \rightarrow \frac{M}{\mu_\alpha^*} \rightarrow \sqrt{\mu_\alpha^* \mu_\alpha^*} \rightarrow Q,$$

$$K^H \rightarrow \frac{4Q \epsilon^{M-1}}{(Q+1)^2 - (Q-1)^2 \epsilon^{2M}}, \quad (12.86)$$

что соответствует выражению для K^H , полученному в [12.21, 12.22].

При решении уравнения (12.78) было сделано допущение, связанное с толщиной оболочки Δ ($\Delta \rightarrow 0$). Это позволило получить решение задачи в обыкновенных функциях. Как показали выполненные расчеты, такой подход допустим при не слишком малых частотах внешнего МП ($f > (10^3 \div 10^4)$ Гц). При более низких частотах погрешности в определении величины эффективности экранирования увеличиваются и целесообразно решение уравнения (12.78) находить через функции Бесселя [12.23, с. 404]:

$$\dot{E} = \left[\dot{C}_H J_M \left(r \sqrt{-k_\alpha^2} \right) + \dot{B}_H Y_M \left(r \sqrt{-k_\alpha^2} \right) \right] \cos \alpha, \quad (12.87)$$

где $J_M \left(r \sqrt{-k_\alpha^2} \right)$ — модифицированная цилиндрическая функция Бесселя 1-го рода; $Y_M \left(r \sqrt{-k_\alpha^2} \right)$ — модифицированная цилиндрическая функция Бесселя 2-го рода, порядка M .

Для упрощения можно аргумент функций $r \sqrt{-k_\alpha^2} = r \sqrt{-j \omega \gamma \mu_\alpha}$ обозначить через x :

$$x = r \sqrt{-j \omega \mu_\alpha \gamma} = r \sqrt{\omega \mu_\alpha \gamma} \exp \left(\pm j \frac{3\pi}{4} \right) = |x| \exp \left(\pm j \frac{3\pi}{4} \right).$$

При целом положительном числе M функции Бесселя от аргумента $x = |x| \exp \left(\pm j \frac{3\pi}{4} \right)$ называются функциями Кельвина, которые табулированы [12.24].

С учетом (12.87):

$$\dot{H}_{\alpha I} = \frac{1}{j\omega\mu_r} [\dot{C}_{II} J_M(x) + \dot{B}_{II} Y_M(x)] \sin \alpha, \quad (12.88)$$

$$\dot{H}_{\alpha II} = \frac{1}{j\omega\mu_a} [\dot{C}_{II} J'_M(x) + \dot{B}_{II} Y'_M(x)] \cos \alpha. \quad (12.89)$$

12.5.3. Плоские экраны

Пример 12.7. Метод расчета плоского анизотропного электромагнитного экрана. Рассматривается экранирование монохроматического ЭМП плоской ферромагнитной пластиной конечной толщины с анизотропными свойствами в системе координат x, y, z . Для исключения необходимости учета краевых эффектов пластина считается бесконечной в направлении осей x и y . Материал пластины обладает одноосной анизотропией параметров, которые можно представить в виде симметричных тензоров:

$$\hat{\gamma} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z \end{vmatrix}, \quad \hat{\mu} = \mu_0 \begin{vmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}, \quad (12.90)$$

где $\hat{\gamma}, \hat{\mu}$ — электрическая проводимость и магнитная проницаемость материала экрана соответственно.

ЭМП возбуждается электрическим диполем $D^{(e)}$ с моментом $\vec{l}dl$. В уравнениях Максвелла обозначим диполь через $\vec{j}^{(cm)}$. Напряженности ЭМП $\{\vec{E}, \vec{H}\}$. Уравнения Максвелла при гармонической зависимости поля от времени $\exp\{j\omega t\}$ записываются в виде (точки над комплексными величинами опускаем):

$$\text{rot } \vec{H} = \hat{\gamma} \vec{E} + \vec{j}^{(cm)}, \quad (12.91)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\mu_0 \hat{\mu} \vec{H}. \quad (12.92)$$

В качестве условий на поверхностях пластины (при $z = 0, -\Delta$) используем фундаментальные граничные условия [12.20]:

$$[\vec{e}_z \times (\vec{E}_{i+1} - \vec{E}_i)]_S = 0; \quad [\vec{e}_z \times (\vec{H}_{i+1} - \vec{H}_i)]_S = 0, \quad (12.93)$$

где i — индекс среды; S — поверхность пластины ($S(z = 0, -\Delta)$).

В ходе решения задачи (12.91–12.92) с параметрами среды за пределами экрана $\mu_0, \epsilon_0, \gamma_0 = 0$ и параметрами экрана $\hat{\gamma}, \hat{\mu}$ требуется найти функции экранирования ЭМП плоской оболочкой в виде:

$$K = \frac{\Phi^{(j)}}{\Phi^{(e)}}, \quad (12.94)$$

где $\Phi^{(j)}$ — одна из функций поля в области за экраном; $\Phi^{(e)}$ — одна из функций исходного поля. В связи с тем, что функции поля в системе координат

x, y, z описываются двойными бесконечными интегралами, в функциях (12.94) будем использовать их изображения.

При решении в уравнения (12.91–12.92) вводятся векторный $\vec{A}$ и скалярный Φ потенциалы выражениями:

$$\hat{\mu}_i \vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (12.95)$$

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \text{grad } \Phi. \quad (12.96)$$

В областях 1 и 3, которые являются изотропными: $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_3 = \mu_0$; $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0$; $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$, потенциалы $\vec{A}$ и Φ связаны соотношением Лоренца

$$\text{div } \vec{A} - (ik^2 / \omega) \Phi = 0, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}.$$

Упрощение уравнений для потенциалов поля в анизотропной среде во многом зависит от выбора связи между $\vec{A}$ и Φ . В среде с одноосной анизотропией максимального упрощения уравнений для $\vec{A}$ удается достигнуть, если эту связь задать выражением вида

$$v_1^2 \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \gamma_2 \mu_2 \Phi = 0, \quad (12.97)$$

где $v_1^2 = \mu_2 / \mu_{z_2} \equiv \mu / \mu_z$.

С учетом соотношения (12.97) уравнение (12.91) запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \text{rot} \left(\hat{\mu}_2^{-1} \text{rot } \vec{A} \right) = \\ & = \hat{\gamma}_2 \left\{ -j\omega \mu_0 \vec{A} + \frac{1}{\gamma_2 \mu} \text{grad} \left[v_1^2 \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \right\} + \mu_0 \vec{j}^{(cm)}. \end{aligned} \quad (12.98)$$

Раскрывая в декартовых координатах левую и правую части уравнения (12.98) и приравнявая выражения при соответствующих ортах $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, получаем уравнения для составляющих векторного потенциала в виде [12.25]:

$$v_1^2 \left(\frac{\partial^2 A_{x,y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{x,y}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 A_{x,y}}{\partial z^2} + k^2 A_{x,y} = -\mu_2 j_{x,y}^{(cm)}; \quad (12.99)$$

$$\begin{aligned} & v_2^2 \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z + \\ & + (v_1^2 - v_2^2) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) = -\mu_2 v_2^2 j_z^{(cm)}, \end{aligned} \quad (12.100)$$

где обозначено:

$$k^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon'_2; \quad \epsilon'_2 = \epsilon_0 + j(\gamma_2 / \omega); \quad v_2^2 = (1 + j(\gamma_2 / \omega \epsilon_0)) / (1 + j(\gamma_z / \omega \epsilon_0)).$$

Для определенности ориентируем ось диполя параллельно оси Ox . В областях 1 и 2 векторный потенциал удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \vec{A}_1 + k_1^2 \vec{A}_1 = -\mu_0 \vec{j}^{(cm)}, \quad k_1^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0. \quad (12.101)$$

В материале пластины для составляющих векторного потенциала имеем систему уравнений (12.99–12.100), но с нулевой правой частью (источник отсутствует). Векторный потенциал поля неоднозначен, он определяется с точностью до градиента произвольной функции [12.25]. Это свойство калибровки потенциалов позволяет сделать равной нулю одну из составляющих векторного потенциала. В нашей задаче удобно положить $A_{y_1} = A_{y_2} = 0$.

Граничные условия для $\vec{A}$ получаются из (12.97) при использовании (12.98–12.99):

$$\left[\vec{n}, \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} - \hat{\mu}_2^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \right]_{z=0} = 0; \quad (12.102)$$

$$\left[\vec{n}, \left\{ \vec{A}_1 + \frac{1}{k_1^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}_1 \right\} - \left\{ \vec{A} + \frac{1}{k^2} \operatorname{grad} \left(v_1^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right\} \right]_{z=0} = 0;$$

$$\left[\vec{n}, \hat{\mu}_2^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} - \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} \right]_{z=-\Delta} = 0; \quad (12.103)$$

$$\left[\vec{n}, \left\{ \vec{A} + \frac{1}{k^2} \operatorname{grad} \left(v_1^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right\} - \left\{ \vec{A}_1 + \frac{1}{k_1^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}_1 \right\} \right]_{z=-\Delta} = 0.$$

Краевая задача (12.102–12.103) решается методом двукратного преобразования Фурье по координатам x и y .

Контрольные вопросы к главе 12

- 12.1. Что вы понимаете под анизотропией материалов, используемых при экранировании?
- 12.2. Чем вызвана анизотропия материалов?
- 12.3. Какие виды анизотропии вы знаете?
- 12.4. Назовите несколько характерных анизотропных материалов.
- 12.5. В чем заключается сложность при расчете экранов с анизотропными свойствами материалов?
- 12.6. При каких условиях анизотропные экраны поддаются аналитическому расчету?
- 12.7. Расскажите о порядке расчета сферического экрана.
- 12.8. Расскажите о порядке расчета кругового цилиндрического экрана.
- 12.9. В чем заключается основная трудность при расчете плоского анизотропного экрана?

Библиографический список к главе 12

- 12.1. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электро-разведке. Ч. 2, вып. 1. — Л., 1936.
- 12.2. Заборовский А. И. Электроразведка. — М.: Гостоптехиздат, 1963.
- 12.3. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в неде-формируемой пористой среде. — М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
- 12.4. Нетушил А. В. Электрические поля в анизотропных средах // Элек-тричество. 1950. № 3.
- 12.5. Нетушил А. В. Расчет и моделирование электрофильтрации в анизо-тропных средах // Труды МЭИ, вып. XIV. 1953. С. 211.
- 12.6. Аполлонский С. М. Справочник по расчету электромагнитных экранов. — Л.: Энергоатомиздат. ЛО, 1988. — 224 с.
- 12.7. Ницецкий В. В. Расчет плоскомеридианных электрических полей в не-которых анизотропных средах // Труды МЭИ, вып. XVIII, 1956.
- 12.8. Collins W. D. Note on the two-dimentional theory of anisotropic dielectrics // Mathematika. 1956. 3. № 5. — С. 63–68.
- 12.9. Беляеский В. Ф., Поливанов К. М. Сердечник из ферромагнитной анизо-тропной ленты // Электромеханика, 1959, № 10.
- 12.10. Belluigi A. Sull'anisotropia Elettrogeomotica // Bollotino di Geofisica teorica ed applicata. n. 1, marzo, 1959.
- 12.11. Нетушил А. В., Поливанов К. М. Основы электротехники. Ч. III. — М.: Госэнергоиздат, 1956.
- 12.12. Поливанов К. М., Кутяшов В. А. Поверхностный эффект в анизотропных листах // Электромеханика. 1958. № 3.
- 12.13. Нетушил А. В. Некоторые задачи теории электронагрева // Электри-чество. 1952. № 8.
- 12.14. Казанцева И. А., Нетушил А. В. Метод измерения электрических параметров анизотропных материалов // Труды МЭИ, вып. XVIII, 1956. С. 158.
- 12.15. Поливанов К. М. Ферромагнетики. — М.: Госэнергоиздат, 1957.
- 12.16. Нетушил А. В., Жуховицкий Б. Я., Кудин В. Н., Парини Е. П. Высоко-частотный нагрев диэлектриков и полупроводников. — М.: Госэнерго-издат, 1959.
- 12.17. Катков Н. Г., Поливанов К. М. Магнитные спектры материала, обуслов-ленные микроскопической структурой // Известия АН СССР, серия физическая, т. XVIII. № 4. 1954. — С. 419.
- 12.18. Нетушил А. В. Влияние толщины изоляции на магнитные свойства сло-истых сердечников // Труды МЭИ, вып. 30, 1958.
- 12.19. Нетушил А. В., Бурлак Н. М., Жуховицкий Б. Я., Кудин В. Н. К расчету дросселей насыщения // Радиотехника. 1960. № 2.
- 12.20. Морозов В. А., Родионова Н. В. Об уменьшении неоднородности поля внешних источников помех в полости магнитного экрана. Препринт № 14 (369) ИРЭ АН СССР. — М., 1983.

- 12.21. Оллендорф Ф. Токи в земле. — М.: ГНТИ, 1932.
- 12.22. Apollonskii S. M., Ostreiko V. N. The Anisotropy of Materials — A Method for Electromagnetic Shielding Performance // *Physica Scripta*, 1995, v. 52, pp. 665–667.
- 12.23. Apollonskii S. M. Improvement of Efficiency of Electromagnetic Screens by Application of Anisotropic Materials // *Proceedings 1994 Intern. Symp. on EMC, Sendai, Japan, (16–20) May, 1994*, pp. 751–754.
- 12.24. Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. — Минск: Университетское, 1988. — 246 с.
- 12.25. Аполлонский С. М. Метод расчета плоского анизотропного электромагнитного экрана // 5-я Российская НТК «ЭМС технических средств и биообъектов», ЭМС-98. — СПб., 1998. С. 124–127.

Глава 13

Электромагнитные поля в перемещающихся средах

13.1. Электромагнитное поле в движущейся среде

13.1.1. Особенности уравнений электромагнитного поля в движущейся среде

Уравнения Максвелла для движущихся сред получаются из аналогичных уравнений для неподвижных сред путем замены частных производных по времени полными производными, определяющими изменение данной величины в точке, движущейся со скоростью $\vec{v}$ вместе со средой [13.1].

Из векторного анализа известно, что в символической векторной форме записи для любой скалярной величины a :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) a, \quad (13.1)$$

для векторной величины $\vec{A}$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) \vec{A}. \quad (13.2)$$

В первом случае $(\vec{v} \text{ grad})a = \vec{v} \text{ grad } a$, во втором $(\vec{v} \text{ grad})\vec{A} \neq \vec{v} \text{ grad } \vec{A}$.

В большинстве технических задач выполняются следующие условия.

1. Модуль скорости движения среды v значительно меньше скорости света c ($v \ll c$), что позволяет пренебречь членами высшего порядка малости и не требует привлечения теории относительности.
2. Материальные параметры среды — диэлектрическая и магнитная проницаемости и удельная проводимость — являются постоянными величинами.

13.1.2. Уравнения электромагнитного поля в движущейся проводящей среде

Для неподвижной проводящей среды уравнения Максвелла имеют вид

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t, \quad \text{div } \vec{B} = 0.$$

Для проводящей среды, движущейся со скоростью $\vec{v}$, замена частных производных полными дает

$$\operatorname{rot} \vec{H}' = \gamma \vec{E}', \operatorname{rot} \vec{E}' = -\frac{d\vec{B}'}{dt} = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} - (\vec{v} \operatorname{grad}) \vec{B}', \operatorname{div} \vec{B}' = 0, \quad (13.3)$$

где значения векторов со штрихами относятся к движущейся среде, т. е. к системе координат, движущейся вместе со средой.

В силу принятых условий

$$(\vec{v} \operatorname{grad}) \vec{B}' = \vec{v} \operatorname{div} \vec{B}' - \operatorname{rot} [\vec{v} \vec{B}']$$

и уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot} \vec{H}' = \gamma \vec{E}', \operatorname{rot} (\vec{E}' - [\vec{v} \vec{B}']) = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{B}' = 0. \quad (13.4)$$

Сопоставление этих уравнений с уравнениями для неподвижной среды показывает, что $\vec{B}' = \vec{B}$ и $\vec{E}' - [\vec{v} \vec{B}'] = \vec{E}$. Следовательно, уравнения Максвелла для движущейся проводящей среды могут быть записаны через величины векторов поля в неподвижной системе координат:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_v) = \gamma (\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]), \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (13.5)$$

Из этих уравнений следует, что движение проводящей среды не изменяет МП, а ЭП изменяется на величину $\vec{E}_v = [\vec{v} \vec{B}]$ — поля, возникающего при движении проводящей среды в МП.

13.1.3. Уравнения электромагнитного поля в движущейся диэлектрической среде

Уравнения Максвелла для неподвижной диэлектрической среды

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (13.6)$$

Для среды, движущейся со скоростью $\vec{v}$ и введения для нее значений векторов со штрихами, уравнения (13.6) приобретают вид [13.2]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H}' &= \frac{d\vec{D}'}{dt} = \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} + (\vec{v} \operatorname{grad}) \vec{D}', \\ \operatorname{rot} \vec{E}' &= -\frac{d\vec{B}'}{dt} = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} - (\vec{v} \operatorname{grad}) \vec{B}', \\ \operatorname{div} \vec{B}' &= 0, \operatorname{div} \vec{D}' = \rho. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Преобразование, аналогичное приведенному в разделе 13.1.2, приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\vec{H}' + [\vec{v} \vec{D}']) &= \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} + \rho \vec{v}, \operatorname{rot} (\vec{E}' - [\vec{v} \vec{B}']) = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B}' &= 0, \operatorname{div} \vec{D}' = \rho. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Сопоставление с уравнениями для неподвижной среды приводит к соотношениям

$$\vec{E} = \vec{E}' - [\vec{v}\vec{B}'], \quad \vec{H} = \vec{H}' + [\vec{v}\vec{D}'] \quad (13.9)$$

или

$$\vec{D}' = \vec{D} + \epsilon[\vec{v}\vec{B}'], \quad \vec{B}' = \vec{B} - \mu[\vec{v}\vec{D}']. \quad (13.10)$$

Из (13.9–13.10) можно выразить величины со штрихами через величины без штрихов:

$$\begin{aligned} \vec{D}' &= \vec{D} + \epsilon[\vec{v}\vec{B}'] = \vec{D} + \epsilon[\vec{v}\vec{B}] - \epsilon\mu[\vec{v}(\vec{v}\vec{D}')] = \\ &= \vec{D} + \epsilon[\vec{v}\vec{B}] - \epsilon\mu\left\{\vec{v}(\vec{v}\vec{D}') - \vec{v}^2\vec{D}'\right\} = \vec{D} + \epsilon[\vec{v}\vec{B}] - \frac{1}{c^2}\left\{\vec{v}(\vec{v}\vec{D}') - \vec{v}^2\vec{D}'\right\}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Так как по принятому выше условию скорость света $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \gg v$, то последними членами, пропорциональными квадрату малого отношения $(v/c)^2$, можно пренебречь. Тогда

$$\vec{D}' = \vec{D} + \epsilon[\vec{v}\vec{B}]. \quad (13.12)$$

Аналогично получается соотношение

$$\vec{B}' = \vec{B} - \mu[\vec{v}\vec{D}]. \quad (13.13)$$

Таким образом, уравнения Максвелла для движущейся диэлектрической среды, выраженные через значения векторов в неподвижной системе координат, получают вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} [\vec{v}\vec{B}] + \rho\vec{v}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial t} [\vec{v}\vec{D}], \\ \text{div}(\vec{D} + \epsilon[\vec{v}\vec{B}]) &= 0, \quad \text{div}(\vec{B} - \mu[\vec{v}\vec{D}]) = 0. \end{aligned} \quad (13.14)$$

Появление новых членов в этих уравнениях означает, что МП создается не только изменением ЭП во времени, но и движением намагниченной среды и движением вместе со средой свободных зарядов, а ЭП определяется, помимо изменения МП во времени, еще движением поляризованной среды.

13.2. Электромагнитное поле во вращающихся преобразователях

13.2.1. Особенности транспортных вращающихся преобразователей

Транспортные электроэнергетические установки представляют особую разновидность автономных энергоустановок. Они характеризуются специфическими требованиями, предъявляемыми к электрооборудованию, которое эксплуатируется

на транспортных средствах. Главные требования: надежность работы в течение заданного срока службы с учетом переменных условий окружающей среды (влажности, давления и температуры); при наличии вибраций; возможность восприятия кратковременных перегрузок по мощности (току); обеспечение заданных показателей качества электроэнергии при работе в транспортной системе электроснабжения; электромеханическое и электромагнитное быстродействие; улучшенные удельные массогабаритные и повышенные энергетические показатели; точность работы элементов электрооборудования, относящихся к информационной группе; электромагнитная совместимость элементов электроэнергетических систем; достаточная степень резервирования; высокие техникоэкономические показатели, в том числе простота обслуживания в процессе регламентных работ, легкость монтажа и замены, пониженная стоимость изготовления и эксплуатации с учетом обеспечения эффективности и безопасности перемещения, включая электробезопасность.

Дальнейшее повышение экономичности, безотказности, скорости и дальности перемещения в значительной мере определяются структурой и функциональными возможностями систем генерирования, распределения и потребления электрической энергии, т. е. качеством электрификации.

13.2.2. Физические основы электромеханического преобразования энергии

Электромеханическое преобразование энергии является одной из важнейших проблем, определяющих состояние и темпы развития электроэнергетики в целом. Механическая и электрическая формы энергии обладают высокой степенью упорядоченности, относительно легко управляемы и широко используются на практике для самых различных целей. Поэтому актуальность проблемы взаимного преобразования этих видов энергии имеет непреходящий характер. Проблема электромеханического преобразования в настоящее время выдвигает новые задачи в связи с дальнейшим развитием науки и техники. Примером развития электромеханики может служить наблюдаемое расширение ее традиционных границ за счет включения актуальных проблем, связанных с разработкой сверхпроводниковых электрических машин (ЭМ), магнитогидродинамических устройств, емкостных машин, накопителей энергии и других объектов, обладающих заметной спецификой по сравнению с классическими ЭМ. Несмотря на то что общие принципы работы электромеханических преобразователей энергии хорошо известны, их теория продолжает непрерывно совершенствоваться как при описании соответствующих физических процессов, так и при создании аналитических методов исследования характеристик, оптимизации, автоматизации проектирования и т. п. Существенное углубление представлений о работе электромеханического преобразователя энергии связано с проявляющимся стремлением унифицировать описание различных типов ЭМ на базе единой обобщенной теории. Помимо описания основных характеристик ЭМ, обобщенная теория способствует накоплению знаний по электромеханическим преобразователям в единую систему, выявляющую фундаментальный характер электромеханических процессов в современной науке.

Действие электромеханического преобразователя основано на движении проводников в ЭП и МП, которые описываются уравнениями Максвелла [13.3]:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (13.15)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (13.16)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (13.17)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (13.18)$$

где $\vec{H}$ — вектор напряженности МП; $\vec{j}$ — вектор плотности тока проводимости; $\vec{D}$ — вектор электрического смещения; $\vec{E}$ — вектор напряженности ЭП; $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции; ρ — объемная плотность электрических зарядов.

Уравнения (13.15–13.18) следует дополнить уравнениями

$$\vec{B} = \mu \vec{H}; \quad (13.19);$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (13.20),$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость; ϵ — абсолютная диэлектрическая проницаемость рассматриваемой среды.

В уравнении (13.15) при исследовании электромеханических процессов в преобразователях током смещения $\partial \vec{D} / \partial t$ можно пренебречь; оставшиеся члены описывают связь между электрическим током и созданным им МП. Уравнение (13.16) характеризует зависимость между изменяющимся во времени МП и создаваемым им ЭП. Уравнения (13.17) и (13.18) характеризуют структуру МП и ЭП. Из них следует, что линии магнитной индукции не имеют начал и концов, а силовые линии ЭП начинаются и оканчиваются на электрических зарядах. Поэтому у однородного МП в какой-либо односвязной рабочей зоне часть каждой линии магнитной индукции будет располагаться в окружающем эту зону пространстве. Чтобы уменьшить затраты энергии на создание МП в рабочей зоне, часто приходится размещать вне ее ферромагнитный сердечник, по которому замыкаются линии магнитной индукции.

Если же необходимо иметь в аналогичной зоне ЭП, то внешние элементы не нужны, так как это поле может быть создано электрическими зарядами на границах зоны.

Дифференциальные уравнения (13.15–13.18) дают связь между электромагнитными параметрами в каждой точке пространства.

При исследовании электромеханических преобразователей часто приходится иметь дело с дискретными элементами, для анализа которых более удобной оказывается интегральная форма электродинамических уравнений.

Если имеется контур L , с которым сцеплены линейные токи $i_1, i_2, \dots, i_n$, то с помощью теоремы Стокса, примененной к (13.15), получим

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n i_k, \quad k \in [1, n], \quad (13.21)$$

то есть циркуляция магнитной напряженности по замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов, сцепленных с этим контуром. Во многих случаях контур L , охватывающий токи, можно разбить на дискретные участки, в пределах которых $\vec{H} \rightarrow \text{const}$. Пусть $\Phi_k = B_k S_k$ — магнитный поток k -го участка, имеющего поперечное сечение S_k и длину l_k , и в контуре L имеется m участков. Учитывая, что $H_k = B_k / \mu_k$, и вводя магнитное сопротивление участка $R_{mk} = l_k / \mu_k S_k$, получаем

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^m H_k l_k = \sum_{k=1}^m \frac{\Phi_k l_k}{\mu_k S_k} = \sum_{k=1}^m \Phi_k R_{mk}.$$

Так как $\sum_{k=1}^m i_k$ по определению есть магнитодвижущая сила (МДС) контура, обозначаемая F , то получим

$$\sum_{k=1}^m \Phi_k R_{mk} = F. \quad (13.22)$$

Соотношение (13.22) можно трактовать как второй закон Кирхгофа для магнитной цепи: МДС в контуре равна алгебраической сумме магнитных напряжений $\Phi_k R_{mk}$ в том же контуре. Такая форма записи закона полного тока (13.21) отражает аналогию между электрическими и магнитными цепями: МДС аналогична электродвижущей силе (ЭДС), магнитный поток — электрическому току, магнитное сопротивление — электрическому сопротивлению.

Аналогично можно получить интегральное представление уравнения (13.16). Для этого учтем, что при движении среды в стационарном МП с индукцией $\vec{B}$ со скоростью $\vec{v}$ в каждой точке помимо приложенного стороннего ЭП с напряженностью $\vec{E}$ наводится ЭП с напряженностью $\vec{E}_v = \vec{v} \times \vec{B}$ и полная напряженность ЭП составит $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$. Далее, добавляя к обеим частям (13.16) $\text{rot}(\vec{v} \times \vec{B})$ и учитывая, что при $\vec{v} \rightarrow \text{const}$ согласно правилам векторного анализа

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - (\vec{v} \nabla) \vec{B} = -\frac{d\vec{B}}{dt},$$

получаем видоизмененную форму второго уравнения Максвелла: $\text{rot} \vec{E}' = -d\vec{B}/dt$. Интегрируя его по площади S , ограниченной контуром L и используя теорему Стокса, получаем

$$e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где e — ЭДС, равная

$$e = \int_L \vec{E}' d\vec{l}. \quad (13.23)$$

Если контур содержит w витков, то, вводя потокосцепление $\Psi = w\Phi$, получаем

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (13.24)$$

Соотношение (13.24) выражает закон электромагнитной индукции Фарадея: ЭДС в контуре определяется взятой со знаком минус полной производной по времени от потокосцепления контура.

Знак минус в формулах для e связан с инерционным характером электромагнитной индукции: наведенная ЭДС направлена так, что создаваемый ею ток препятствует изменению магнитного потока (правило Ленца).

Применим формулу (13.24) к плоской рамочной катушке с w витками, которая вращается с угловой скоростью ω в однородном стационарном МП с индукцией $\vec{B}$ (рис. 13.1). При $t = 0$ плоскость катушки перпендикулярна $\vec{B}$ и ее потокосцепление Ψ максимально, т. е. $\Psi = \Psi_m = wBS$, где S — площадь, охватываемая витком катушки. Очевидно, что Ψ меняется во времени как

$$\Psi(t) = \Psi_m \cos \omega t. \quad (13.25)$$

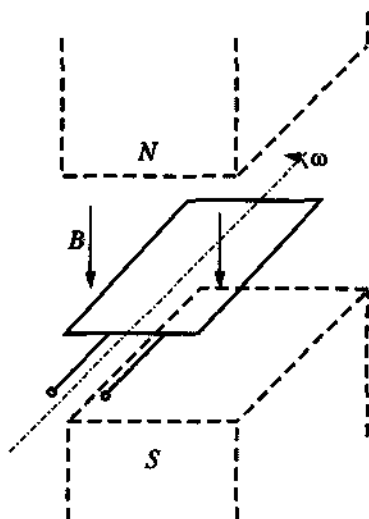


Рис. 13.1. Рамочная катушка в МП

В системе координат, связанной с катушкой, имеем

$$e(t) = -\frac{d\Psi}{dt} = E_m \sin \omega t; \quad (13.26)$$

$$E_m = \omega \Psi_m. \quad (13.27)$$

Формулы (13.26) и (13.27) справедливы и для случая, когда рамка неподвижна, а с угловой скоростью ω вращаются полюсы, создающие МП.

Часто необходимо найти ЭДС e , между концами линейного проводника длиной l , движущегося со скоростью $\vec{v}$ в стационарном МП с индукцией $\vec{B}$. Будем считать, что концы проводника скользят по неподвижным направляющим, соединенным с пассивной внешней цепью. Тогда для всей цепи, охватываемой контуром L , получим

$$e = \oint_L \vec{E}' d\vec{l} + \oint_L \vec{E} d\vec{l} + \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}.$$

Первый интеграл по замкнутому контуру равен нулю, так как при стационарном МП стороннее ЭП — потенциальное. Во втором интеграле пределы интегрирования ограничены длиной проводника, поскольку у остальных элементов цепи скорость равна нулю. Таким образом,

$$e_1 = \int_0^l (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}. \quad (13.28)$$

Если проводник неподвижен, а движутся полюсы, создающие $\vec{B}$, получим тот же результат. Под $\vec{v}$ всегда следует понимать относительную скорость проводника в МП.

Из (13.28) следует, что ЭДС максимальна, когда векторы $\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{l}$ взаимно ортогональны. Для этого случая

$$e_1 = Bv \quad (\text{при } \partial B / \partial t = 0). \quad (13.29)$$

Направление e_1 определяется правилом правой руки: если большой отогнутый палец направлен по относительной скорости проводника, а линии МП входят в ладонь, то четыре остальных пальца указывают направление e_1 .

Кроме уравнений Максвелла, фундаментальным соотношением для описания ЭМП является закон Ома, устанавливающий связь между ЭП и МП, с одной стороны, и электрическим током — с другой. В отсутствие эффекта Холла он имеет вид

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}' = \gamma (\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})), \quad (13.30)$$

то есть плотность тока пропорциональна и параллельна полной напряженности $\vec{E}'$, складывающейся из напряженности внешнего ЭП с напряженностью $\vec{E}$ и наведенной за счет движения напряженности, равной $\vec{v} \times \vec{B}$. Коэффициент пропорциональности γ между $\vec{J}$ и $\vec{E}'$ есть удельная электрическая проводимость среды.

Интегральное представление закона Ома получается простым интегрированием (13.30) по сечению проводника. Если к проводнику с сопротивлением R (проводимостью $G=1/R$) приложено напряжение U и в нем наводится ЭДС e , то по нему потечет ток

$$I = G(U \pm e). \quad (13.31)$$

Знак плюс означает согласную полярность U и e , знак минус — противоположную.

Помимо ЭП и МП во всех ЭМП существуют электрические токи, взаимодействующие с полями, что проявляется в создании объемных электромагнитных сил, действующих на активную зону и обеспечивающих взаимное преобразование механической и электрической энергии.

Основное соотношение для удельной электромагнитной силы, действующей на единичный объем среды, имеет вид

$$f_s = \vec{J} \times \vec{B}. \quad (13.32)$$

Полная электромагнитная сила $\vec{F}_s$, действующая на линейный проводник $\vec{l}$ с током i в поле с индукцией $\vec{B}$, определяется интегрированием f_s по объему проводника:

$$\vec{F}_s = i(\vec{l} \times \vec{B}). \quad (13.33)$$

Наиболее эффективное преобразование механической энергии в электрическую будет при максимальном значении $\vec{F}_s$, когда векторы $\vec{l}$ и $\vec{B}$ взаимно ортогональны и

$$F_s = B \vec{l} i. \quad (13.34)$$

Для определения направления $\vec{F}_s$ можно использовать правило левой руки: большой отогнутый палец левой руки укажет направление $\vec{F}_s$, если линии магнитной индукции $\vec{B}$ входят в ладонь, а остальные четыре пальца направлены по току.

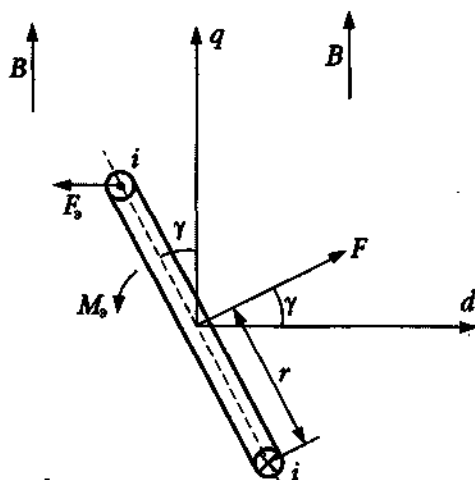


Рис. 13.2. Силы, действующие на катушку в МП

Во многих ЭМП приходится рассматривать момент, действующий на рамочную катушку с током, вращающуюся в МП. Такая катушка изображена на рис. 13.2 в координатах d и q . Пусть МП направлено по оси, в катушке имеется w витков с током i , а ось катушки наклонена под углом γ к оси d .

Катушка создает МДС $F = iw$, и с катушкой сцеплен магнитный поток Φ , зависящий от ее положения. На каждую сторону катушки длиной l , согласно (13.34), действует сила $B_q iw$, создающая электромагнитный момент:

$$M_s = 2(B_q iw) r \cos \gamma = (B_q \cdot 2rl)(iw \cos \gamma) = \Phi_q F_d,$$

где Φ_q — полный максимальный магнитный поток для катушки по оси q ; F_d — МДС катушки по оси d . При произвольном направлении МП с составляющими индукции B_q и B_d получим

$$M_s = \Phi_q F_d - \Phi_d F_q, \quad (13.35)$$

где $\Phi_q = B_q \cdot 2rl$; $\Phi_d = B_d \cdot 2rl$; $F_q = F \sin \gamma$; $F_d = F \cos \gamma$.

Формулу (13.35) можно переписать в виде

$$M_s = \Psi_q i_d - \Psi_d i_q, \quad (13.36)$$

где $i_d = i \cos \gamma$; $i_q = i \sin \gamma$.

Формула (11.36) непосредственно применима для системы из двух равновеликих механически связанных катушек, изображенных на рис. 13.3. Индекс d в этом случае относится к параметрам катушки, ось которой направлена по d , а индекс q — к параметрам катушки с осью вдоль q .

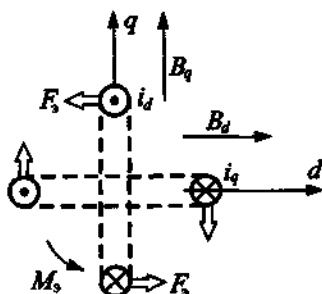


Рис. 13.3. Система из двух равновеликих, механически связанных катушек

В линейных системах электромагнитную силу $F_{s\xi}$, действующую на контур с током, перемещающийся в направлении ξ , можно определить по формуле:

$$|F_{s\xi}| = \partial W_s / \partial \xi, \quad (13.37)$$

где W_s — магнитная энергия системы, которую при $\mu \rightarrow \text{const}$ или кусочно-постоянной μ можно вычислять как

$$W_s = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu} dv,$$

где V — объем, занятый МП.

В электромеханических системах, где обычно имеется конечное число дискретных контуров с токами, магнитную энергию системы удобно вычислять по формуле:

$$W_{\kappa} = 0,5 \sum_{k=1}^n i_k \Psi_k, \quad (13.38)$$

где i_k и Ψ_k — электрический ток и потокоцепление k -го контура.

Для m индуктивно связанных контуров потокоцепление Ψ_k находится как

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{n=1, n \neq k}^m M_{kn} i_n, \quad (13.39)$$

где L_k — индуктивность контура; M_{kn} — взаимная индуктивность между контурами k и n .

В некоторых случаях электромагнитную силу можно рассчитать по разности магнитных давлений на границах области. Пусть, например, имеется проводящий слой с токами, слева и справа от которого магнитные индукции равны соответственно B_1 и B_2 . Тогда удельное магнитное давление на слой справа будет $B_2^2 / (2\mu_0)$, а слева — $B_1^2 / (2\mu_0)$. Разность этих величин, умноженная на площадь одной стороны слоя, даст полную силу, действующую на слой.

Электромеханические преобразователи, использующие эффект электромагнитной индукции, назовем индуктивными.

Согласно принципу электростатической индукции, при внесении проводника во внешнее ЭП его свободные заряды перераспределяются так, что полное ЭП внутри проводника становится равным нулю. Работающие на этом принципе электромеханические преобразователи назовем емкостными.

Известно, что заряд проводника q линейно связан с его потенциалом Φ через коэффициент пропорциональности C , называемый емкостью проводника:

$$q = C\Phi. \quad (13.40)$$

Емкость системы проводников зависит от формы проводников и их относительного положения в пространстве. Для каждого из n проводников системы заряд определяется как

$$q_i = \sum_{k=1}^n C_{ik} \Phi_k, \quad (13.41)$$

где C_{ik} — коэффициенты пропорциональности, зависящие от положения проводников и называемые емкостными коэффициентами, а Φ_k — потенциал k -го проводника.

В емкостном электромеханическом преобразователе емкость C или емкостные коэффициенты C_{ik} периодически меняются во времени благодаря движению проводников; при этом меняется q и в цепи, связывающей проводники и нагрузку, возникает электрический ток

$$i = dq / dt. \quad (13.42)$$

Энергия, которая выделяется в цепи с током i , компенсируется механической энергией, затрачиваемой на преодоление электростатических сил между перемещающимися проводниками.

В линейных системах силу $F_{\partial\xi}$, действующую со стороны ЭП на проводник, перемещающийся в направлении ξ , можно найти по формуле:

$$|F_{\partial\xi}| = \partial W_s / \partial \xi, \quad (13.43)$$

где W_s — энергия ЭП, которая при постоянной диэлектрической проницаемости ($\epsilon = \text{const}$) или кусочно-постоянной ϵ равна

$$W_s = \int_V 0,5 \epsilon E^2 dv,$$

где V — объем, занятый ЭП.

При исследовании электромеханических устройств удобнее пользоваться формулой:

$$W_s = 0,5 \sum_{k=1}^n q_k \Phi_k, \quad (13.44)$$

где q_k , Φ_k — заряд и потенциал проводника, а суммирование проводится по всем заряженным проводникам.

Поскольку емкостные электромеханические преобразователи, по существу, состоят из конденсаторов с подвижными элементами, часто используется формула для энергии конденсатора:

$$W_s = 0,5 C U^2 = 0,5 (q^2 / C), \quad C = \epsilon S / d, \quad (13.45)$$

где U — напряжение на обкладках; S — площадь противолежащих участков пластин; d — расстояние между пластинами.

13.3. Магнитогидродинамические преобразователи

13.3.1. Основы магнитной гидродинамики

В конце XX века интенсивно развивалась магнитная гидродинамика. Эта область знаний касается движения проводящей жидкой или газообразной среды во внешнем МП.

Движение проводящей среды в МП, в отличие от рассмотренного в разделе 13.2 движения без внешнего поля, сопровождается появлением токов, создающих дополнительное МП. Взаимодействие этих токов с суммарным МП обуславливает особый характер движения среды. Расчет этого движения и составляет основную задачу магнитной гидродинамики.

Магнитогидродинамические (МГД) явления имеют место в условиях Земли (например, перемещение морской воды в МП Земли) и в космосе. Звезды, солнце и ядра планет представляют собой жидкие и газообразные среды, движущиеся в МП, в динамике межпланетных ионизованных газовых сред (например, в ионосфере Земли, находящейся в земном МП). В условиях космоса

даже малые силы электромагнитного характера могут вызвать заметные результаты, так как время действия этих сил весьма велико.

Много усилий потрачено на использование МГД явлений для прямого преобразования тепловой энергии в электрическую в МГД генераторах, не имеющих вращающихся частей и заменяющих систему котел — турбина — генератор. МГД явления используются также в работах по созданию управляемой термоядерной реакции, для перекачки расплавленного металла, плазменных реактивных двигателей космических аппаратов и т. д.

Теория МГД явлений развивается как для несжимаемых, так и сжимаемых сред. Здесь необходимо совместно решать уравнения ЭМП в движущейся проводящей среде (раздел 13.1) с уравнениями гидродинамики, дополненными членами, соответствующими силам электромагнитного происхождения.

Выведенные в разделе 13.1 уравнения ЭМП в движущейся проводящей среде удобно записать несколько иначе, исключив из них вектор напряженности ЭП.

Применение операции rot для обеих частей уравнения (13.4) и подстановки вектора $\vec{E}$ из уравнения (13.9) дают

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\frac{1}{\gamma} \text{rot rot } \vec{H} + \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}] = \\ &= -\frac{1}{\gamma} (\text{grad div } \vec{H} - \Delta \vec{H}) + \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}] = \frac{1}{\gamma} \Delta \vec{H} + \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}]\end{aligned}\quad (13.46)$$

при $\text{div } \vec{H} = 0$. Так как $\vec{B} = \mu \vec{H}$, то

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu} \Delta \vec{H} + \text{rot}[\vec{v}, \vec{H}]. \quad (13.47)$$

Основными уравнениями гидродинамики для среды с плотностью вещества ρ , движущейся со скоростью $\vec{v}$, являются уравнение непрерывности и уравнение движения.

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (13.48)$$

отражает закон сохранения массы — изменение ее в данном объеме равно массе, прошедшей через поверхность, ограничивающую этот объем.

Уравнение движения (уравнение Навье—Стокса)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } p + \rho \vec{g} + \rho \vec{v} \Delta \vec{v} + \vec{F}, \quad (13.49)$$

где ρ — плотность среды, p — давление среды, отражает закон Ньютона — произведение массы на ускорение равно действующей силе. Здесь все члены отнесены к единице объема. Первый член правой части соответствует силе, возникающей из-за градиента давления; второй член — силе тяжести, где $\vec{g}$ — ускорение силы тяжести; третий член — силе вязкости, где $\vec{v}$ — кинематический

коэффициент вязкости; четвертый член — силе $\vec{F}$ электромагнитного происхождения.

Величина $\vec{F}$ может быть получена из выражения

$$\vec{F} = \frac{d\vec{f}}{dV} = \frac{[i d\vec{l}, \vec{B}]}{d\vec{l} d\vec{S}} = [\vec{i}, \vec{B}], \quad (13.50)$$

где $d\vec{f}$ — сила, действующая в магнитном поле на элемент тока $i d\vec{l}$, $i = \vec{\delta} d\vec{S}$ — ток, протекающий в объеме $dV = d\vec{l} d\vec{S}$.

Для сжимаемой среды основные уравнения гидродинамики должны быть дополнены: уравнением состояния, связывающим между собой плотность ρ , давление p и температуру T :

$$p = p(\rho, T), \quad (13.51)$$

и уравнением теплового баланса, связывающим тепловую энергию W_T единицы массы, плотность ρ и полное количество тепла α в единице объема, обусловленное теплопроводностью, вязкостью и электрическим током:

$$\rho \frac{dW_T}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \alpha. \quad (13.52)$$

В большинстве случаев основную роль играет теплопроводность. Тогда $\alpha = \beta \Delta T$, где β — коэффициент теплопроводности.

Уравнения (13.51) и (13.52) должны приниматься во внимание лишь тогда, когда изменение давления, плотности и температуры оказывает существенное влияние на движение проводящей среды, как это, например, имеет место при рассмотрении МГД явлений в плазме и газовых средах.

Таким образом, полная система уравнений магнитной гидродинамики состоит из следующих уравнений [13.4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \frac{1}{\gamma \mu} \Delta \vec{H} + \text{rot}[\vec{v} \vec{H}], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0, \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\text{grad } p + \rho \vec{g} + \rho \vec{v} \Delta \vec{v} + [\vec{\delta} \vec{B}], \\ p &= p(\rho, T), \\ \rho \frac{dW_T}{dt} &= \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \alpha. \end{aligned} \quad (13.53)$$

Как видно из системы уравнений магнитной гидродинамики (13.53), процессы зависят от многих факторов, в том числе от скорости перемещения среды и от ее проводимости. Так как значения скорости и проводимости среды в различных устройствах меняются в весьма широких пределах, решение этой системы уравнений в общем виде представляет значительные сложности.

13.3.2. Магнитогидродинамический генератор

МГД-генератор, принципиальная схема которого приведена на рис. 13.4, представляет собой канал K с двумя стенками из электроизоляционного материала; две другие стенки $\mathcal{E}$ изготовлены из электропроводящего материала и служат электродами. Если по каналу в направлении, указанном стрелкой, со скоростью $\vec{v}$ пропустить электропроводящую среду (жидкую или газообразную), а перпендикулярно изоляторным стенкам приложить МП с индукцией $\vec{B}$, то в движущейся среде будет индуцироваться ЭП напряженностью $\vec{E} = [\vec{v}\vec{B}]$, перпендикулярное направлению движения и направлению приложенного МП (правило правой руки). Это индуцированное ЭП определяет ЭДС МГД-генератора, снимаемую с электродов $\mathcal{E}$.

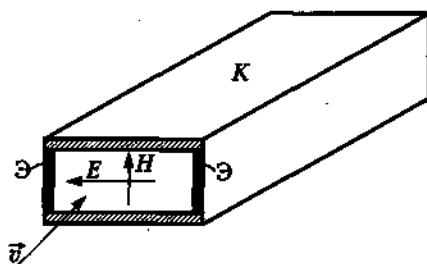


Рис. 13.4. Принципиальная схема МГД-генератора

Если в качестве рабочего тела в канале МГД-генератора используется газообразная среда, то на ее движение и нагрев до электропроводного состояния затрачивается тепловая энергия, которая затем в генераторе преобразуется в электрическую энергию. Работа генератора на нагрузку связана с появлением силы на единицу объема $\vec{F} = [\vec{B}\vec{v}]$, направленной против движения рабочей среды. Увеличение нагрузки генератора сопровождается уменьшением скорости рабочего тела в канале.

МП, необходимое для работы МГД-генератора так же, как и в обычных индуктивных генераторах, сохраняет свою энергию неизменной: в электрическую энергию она не преобразуется.

13.3.3. Магнитогидродинамический двигатель

МГД-генератор является обратимым, т. е. при подаче напряжения постороннего источника на $\mathcal{E}$ в проводящей среде возникает ЭП. Оно взаимодействует с МП, созданным системой возбуждения. Возникает сила, которая перемещает электропроводящую среду. Машина работает в двигательном режиме.

Здесь, таким образом, действует принцип преобразования энергии движущейся электропроводящей среды при наличии постоянного МП в постоянное ЭП, и наоборот, перемещение проводящей электрический ток среды в скрещенных постоянных МП и ЭП. Аналогичный эффект наблюдается и в случае

использования такого принципа преобразования энергий и при приложении переменных МП. Так, для перекачки жидкого металла применяются насосы трехфазного тока. В них аналогично вращающемуся МП (в обычных ЭМ) создается бегущее МП, увлекающее за собой металл. Подобные машины могут быть использованы и в генераторном режиме.

Аналогично МГД машинам возможно создание электрогидродинамических машин, основанных на движении непроводящих электрический ток сред в ЭП.

13.4. Расчет электромагнитных полей в перемещающихся средах

13.4.1. Движение заряженных частиц в скрещенных полях

Пример 13.1. Источник заряженных частиц создает пучок, в котором все частицы с зарядом q и массой m имеют одно и то же направление скорости — вдоль оси x (рис. 13.5). При движении частицы попадают в зазор постоянного магнита, в котором создано однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, направленное перпендикулярно движению частиц за плоскость чертежа — «магнитная стенка» [13.5].

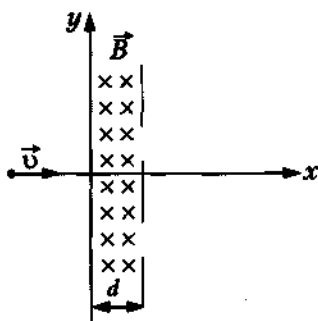


Рис. 13.5. Пучок заряженных частиц в поперечном МП

Требуется определить: 1. При каких наибольших скоростях $v_{\max}$ заряженные частицы еще отражаются от «магнитной стенки»? 2. Зависит ли условие отражения от знака заряда? 3. На какой угол изменится траектория заряженных частиц, движущихся со скоростями $v=10v_{\max}$ после пролета «магнитной стенки»?

Решение. 1. Заряженные частицы в однородном МП будут двигаться по окружностям (рис. 13.6), радиусы которых определяются условием равенства центростремительной силы и силы Лоренца:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB.$$

Следовательно, $R = (mv / qB)$. Центры окружности O' для $q > 0$ и O'' для $q < 0$ лежат на оси y . Условие отражения выполняется, если $R < d$, т. е. при $v = v_{\max} < (qBd / m)$.

2. Условие отражения не зависит от знака заряда (рис. 13.6, а).

3. Если $v = 10v_{\max}$, то $R = 10d$. Угол отклонения (рис. 13.6, б) после пролета частицей «магнитной стенки» определим из выражения: $\alpha = \arcsin(d / R) \approx 0,1$ рад, так как при малых α $\sin \alpha \approx \alpha$.

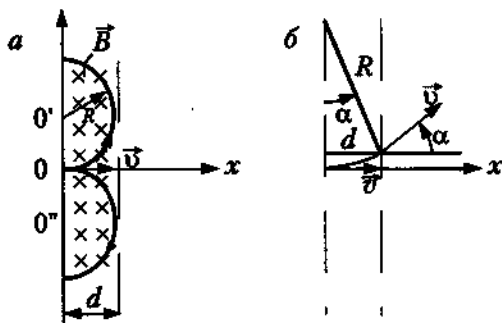


Рис. 13.6. Траектории движения заряженных частиц в поперечном МП

Пример 13.2. В однородном МП с индукцией $\vec{B}$ в точке O помещен источник, испускающий одинаковые частицы с зарядом q и массой m . Источник испускает частицы под углом α к направлению силовых линий (рис. 13.7).

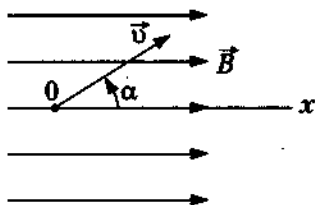


Рис. 13.7. Источник, испускающий заряженные частицы в присутствии МП

Требуется: 1. Определить траекторию движения частиц. 2. Показать, что при малых углах α магнитное поле обладает фокусирующим действием. 3. Определить, будет ли движение частиц при $\alpha = 0$ устойчивым?

Решение. 1. Движение заряженных частиц можно представить как суперпозицию двух независимых движений: равномерного перемещения вдоль силовых линий МП со скоростью $v_{\text{нр}} = v \cos \alpha$ и равномерного вращения по окружности радиуса $R = (qv_{\text{вр}} / mB)$ вокруг силовой линии, где $v_{\text{вр}} = v \sin \alpha$. В совокупности оба движения приводят к перемещению частиц по винтовым линиям. Так как время одного оборота частицы (период ее вращения) $T = (2\pi R / v_{\text{вр}}) = (2\pi m / qB)$, шаг винтовой линии $l = v_{\text{нр}} T = (2\pi m / qB) v \cos \alpha$.

2. При малых α $\cos \alpha \approx 1 - (\alpha^2 / 2)$ и, следовательно, все частицы с одинаковыми q / m и v , испущенные из точки O под малыми углами α к силовым

линиям, соберутся на той же линии на расстоянии $l_0 \approx (2\pi m / qB)v$ (разброс порядка $\alpha^2 / 2$).

Пример 13.3. Для определения массы m заряженных частиц используется трохотрон (один из типов масс-спектрометров), названный так потому, что в нем частицы под действием взаимно перпендикулярных однородных электрического ($\vec{E}$) и магнитного ($\vec{B}$) полей движутся по трохонидальным траекториям.

Требуется: 1. Показать, что пучок с одинаковым отношением q/m при любых значениях начальной скорости $\vec{v}$, вектор которой лежит в плоскости yOz (рис. 13.8), под действием скрещенных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ вновь пересечет ось y в точке O_1 . 2. Найти зависимость фокусного расстояния l от величины E, B и q/m . 3. Определить, зависит ли фокусное действие скрещенных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ от знака заряда?

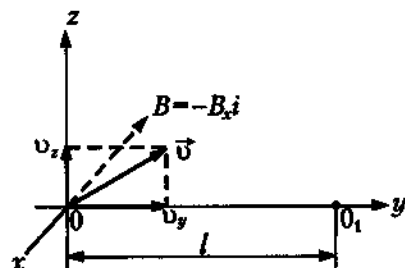


Рис. 13.8. Пучок заряженных частиц в присутствии скрещенных ЭП и МП

Решение. Уравнение движения частицы в скрещенных полях $\vec{E}$ и $\vec{B}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}])$$

в данном случае разбивается на два уравнения:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = qB \frac{dz}{dt}; \quad (13.54)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = qE - qB \frac{dy}{dt}. \quad (13.55)$$

Перейдя к системе координат, движущейся в направлении оси y с постоянной скоростью $v = E/B$, т. е. введя новую переменную $y_1 = y - vt$, из выражений (13.54) и (13.55) получим

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = (qB/m) \frac{dz}{dt}; \quad (13.56)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -(qB/m) \frac{dy_1}{dt}. \quad (13.57)$$

В уравнениях (13.56) и (13.57) отсутствует $\vec{E}$. Это означает, что в движущейся системе координат на частицу оказывает воздействие только однородное

МП, под действием которого в системе координат y, z она будет двигаться по окружности. Результирующее движение частицы есть наложение вращения в плоскости yOz и поступательного (дрейфового) движения со скоростью $v = E/B$ вдоль оси y . Через время T , равное одному обороту (периоду вращения), частица пройдет вдоль оси y расстояние $l = vT$ и вновь пересечет ось y . Так как скорость дрейфа $v = E/B$ и период $T = 2\pi m/qB$ (см. задачу 13.2) не зависят от начальной скорости, все частицы с одинаковым отношением q/m попадут в точку O_1 , отстоящую от начала координат на расстояние $l = 2\pi mE/qB^2$.

Направление дрейфа частиц при $q > 0$ и $q < 0$ одно и то же, так как с изменением знака заряда меняется и направление действия электрической силы.

Пример 13.4. В некоторой области пространства создано аксиально симметричное нарастающее во времени МП с индукцией $\vec{B}(t)$, которое индуцирует вихревое ЭП с напряженностью $\vec{E}(t)$ (рис. 13.9). Считая, что в момент начала возбуждения поля электрон в точке A находился в состоянии покоя, найти условие его движения по круговой орбите со скоростью $v \ll c$.

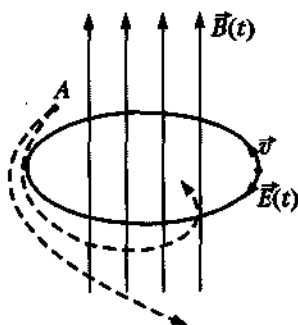


Рис. 13.9. Вихревое ЭП

Решение. Характер траектории зависит от соотношения между электрическими и магнитными силами. Если силовое действие МП в зоне движения электрона мало по сравнению с действием ЭП, то вихревое поле $\vec{E}$ заставляет электрон двигаться по раскручивающейся спирали. В противоположном случае электрон будет двигаться по сжимающейся спирали к центру. Следовательно, при определенных соотношениях между $\vec{E}$ и $\vec{B}$ возможно движение по окружности. Допустим, что эти соотношения выполняются. Тогда при круговом движении

$$mv^2/R = qvB, \quad mv/R = qBR, \quad (13.58)$$

где R — радиус окружности.

При движении электрона по окружности изменение импульса обусловлено электрическими силами:

$$\frac{d(mv)}{dt} = -qE,$$

где $E = -\frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$, откуда $mdv = (q/2\pi R) d\Phi$ и, следовательно,

$$mv(t) = \frac{q}{2\pi R} \Phi(t). \quad (13.59)$$

По условию начальная скорость $v(0) = 0$ и поток $\Phi(0) = 0$. Используя уравнение (13.58), получим

$$B(t) = \frac{\Phi(t)}{2\pi R^2} = 0,5 B_{\varphi}(t),$$

где $B_{\varphi}(t) = \Phi(t) / \pi R^2$ — среднее значение.

Последнее условие означает, что электрон может вращаться по круговой орбите, если поле $B(t)$ на этой орбите в два раза меньше среднего поля внутри нее.

13.4.2. Движение сплошных проводящих сред в электромагнитном поле

Пример 13.5. Медный тонкий лист поступательно движется со скоростью $\vec{v}$ ($v \ll c$) в перпендикулярно направленном однородном магнитном поле $\vec{B}$ (рис. 13.10).

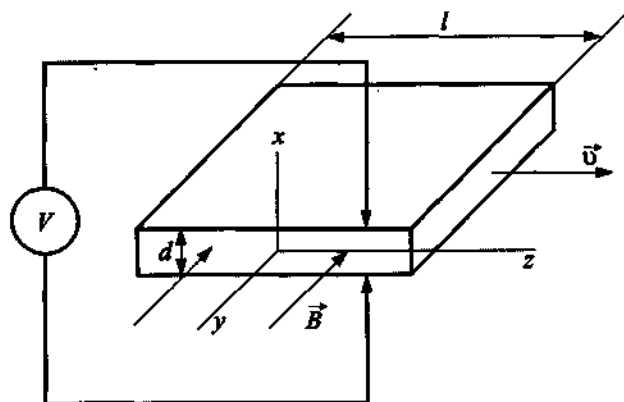


Рис. 13.10. Перемещение металлического листа в МП

Требуется: 1. Найти плотность индуцированного заряда на поверхности и индуцированное ЭП. 2. Определить показание вольтметра, присоединенного через щетки к боковым поверхностям листа, считая $d \ll l$ и сопротивление вольтметра $R_v \rightarrow \infty$. 3. Определить, изменятся ли показания вольтметра, если движущийся лист выполнен из магнитного материала с $\mu_r = \text{const}$?

Решение. 1. При движении листа индуцируется стороннее поле $\vec{E}_{\text{см}} = [\vec{v}\vec{B}_0]$, направленное по оси x . Под действием $\vec{E}_{\text{см}}$ в проводящем листе должен протекать ток плотностью $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}_0])$. Так как цепь не замкнута ($R_v \rightarrow \infty$),

$\vec{j}=0$ и, следовательно, $\vec{E} = -[\vec{v}\vec{B}_0]$. Эта напряженность обусловлена появлением поверхностных зарядов плотностью $\sigma = \epsilon_0 E$ (на верхней плоскости $+\sigma$, на нижней $-\sigma$). Составим циркуляцию $\vec{E}$ по контуру с вольтметром. Поток через контур не меняется, поэтому

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Отсюда $E_x d + U_v = 0$; $U_v = vB_0 d$.

2. Показания вольтметра U_v не меняются. Действительно, $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$, так как поток через контур уменьшается со скоростью v : $-\partial \Phi / \partial t = (B - \mu_0 H)vd$, где $B_0 = \mu_0 H$. Следовательно, $U_v = -E_x d + \partial \Phi / \partial t = Bvd - Bvd + B_0 vd = vB_0 d$.

Пример 13.6. В плоском канале шириной d вдоль оси z (рис. 13.11) движется в поперечном МП с плотностью $\vec{B}$ вязкая несжимаемая проводящая жидкость.

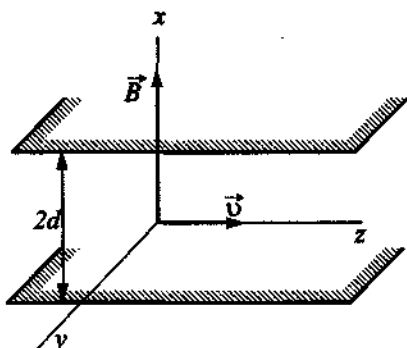


Рис. 13.11. Движение несжимаемой проводящей жидкости в плоском канале в поперечном МП

Требуется: найти распределение скоростей по сечению канала, считая течение жидкости установившимся. Краевыми эффектами пренебречь.

Решение. При движении жидкости во внешнем МП с плотностью B_x индуцируются токи плотностью J_y . В свою очередь, индуцированные токи создают собственное МП B_z (рис. 13.12). Поле B_z создает объемные силы, которые уравниваются поперечным к потоку градиентом давления $(-\partial p / \partial z)$. В силу стационарности течения $\partial p / \partial z = \text{const}$.

Из уравнения движения $\nabla p = [\vec{j}\vec{B}] + \eta \nabla^2 \vec{v}$ получим

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -J_y B_x + \eta \frac{d^2 v_z}{dx^2}.$$

По закону Ома $J_y = \gamma(E_y + v_z B_x)$, где $E_y = \text{const}$, так как $\text{rot } \vec{E} = 0$. Отсюда

$$\eta \frac{d^2 v_z}{dx^2} - \gamma B_x^2 v_z = \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma E_y B_x = -\gamma B_x^2 v_0,$$

где $v_0 = v_z|_{x=0}$.

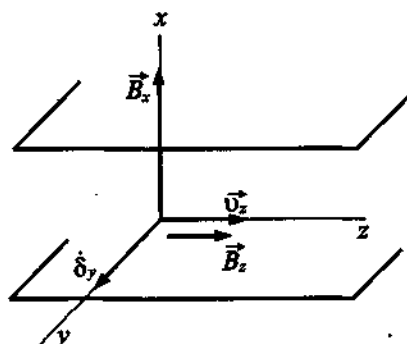


Рис. 13.12. Токи и магнитное поле, индуцируемые при движении несжимаемой жидкости в поперечном МП

С учетом граничных условий ($v=0$; $B_z=0$) при $x=\pm d$ найдем

$$v_z(x) = v_0 \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(d_0/d)x}{\operatorname{ch} d_0} \right),$$

где $d_0 = d B_x \sqrt{\gamma/\eta}$.

13.4.3. Магнитное поле линейного цилиндрического индуктора

Пример 13.7. Рассмотрим бесконечно длинный цилиндрический индуктор [13.4] с полостью, образованной двумя магнитопроводами: внешним с внутренним радиусом r_1 и внутренним с внешним радиусом r_2 (рис. 13.13).

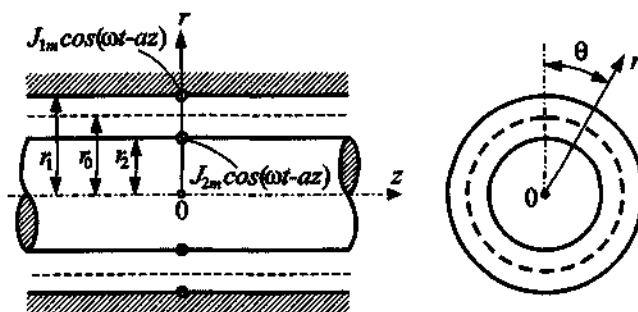


Рис. 13.13. Эскиз индуктора цилиндрической индукционной МГД-машины

Сделаем следующие допущения:

1. Длина индуктора в направлении оси z в обе стороны бесконечно велика, т. е. продольные краевые эффекты отсутствуют.
2. Поверхности магнитопроводов не имеют пазов и зубцов.
3. Магнитная проницаемость магнитопроводов $\mu_c = \infty$, а электрическая проводимость $\gamma_c = 0$.

4. Обмотки расположены на поверхностях магнитопроводов, их радиальные размеры бесконечно малы, и они несут токи, которые замыкаются по кольцевым нитям с $r = r_1$ и $r = r_2$, причем в направлении оси z распределение токов представляет собой синусоидальную волну с полюсным делением τ .

Выберем праввинтовую цилиндрическую систему координат R, θ, z (рис. 13.13). Линейные плотности токов внешней J_1 и внутренней J_2 обмотки будут:

$$\begin{cases} J_1 = J_{1m} \cos(\omega t - \alpha z); \\ J_2 = J_{2m} \cos(\omega t - \alpha z). \end{cases} \quad (13.60)$$

Решение. МП в областях, где протекают электрические токи, можно определять через скалярный магнитный потенциал U_m . В случае рис. 13.13 во всей области $r_2 \leq r \leq r_1$ величина U_m определяется уравнением Лапласа, которое в цилиндрических координатах имеет вид (в силу круговой симметрии U_m не зависит от координаты):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_m}{\partial z^2} = 0. \quad (13.61)$$

При принятых допущениях поле вдоль оси z изменяется синусоидально и представляет собой бегущую волну. Поэтому можно положить (опуская точки над комплексными величинами)

$$U_m = \operatorname{Re} [U_{mm} e^{j(\omega t - \alpha z)}], \quad (13.62)$$

где U_{mm} — амплитуда магнитного потенциала; $\alpha = \pi / \tau$, $j = \sqrt{-1}$.

При подстановке U_m из (13.62) в (13.61) получим уравнение для U_{mm} :

$$\frac{\partial^2 U_{mm}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{mm}}{\partial r} - \alpha^2 U_{mm} = 0.$$

Решением этого уравнения будет [13.12]

$$U_{mm} = C_1 I_0(\alpha r) + C_2 K_0(\alpha r), \quad (13.63)$$

где $I_0(\alpha r)$; $K_0(\alpha r)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка соответственно 1-го и 2-го рода от аргумента αr , C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Для определения C_1 и C_2 используем существующие физические граничные условия поля на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$. Согласно этим условиям касательные составляющие $\vec{H}$ на этих поверхностях равны линейным плотностям токов на этих поверхностях. Поэтому

$$\begin{aligned} H_{z1} &= +J_{1m} \cos(\omega t - \alpha z); \\ H_{z2} &= +J_{2m} \cos(\omega t - \alpha z) \end{aligned}$$

или в комплексной форме

$$H_{z1} = +J_{1m} e^{j(\omega t - \alpha z)}; H_{z2} = -J_{2m} e^{j(\omega t - \alpha z)}. \quad (13.64)$$

С другой стороны, $\vec{H} = -\text{grad} U_m$, поэтому

$$H_r = -\frac{\partial U_m}{\partial r}; H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U_m}{\partial \theta}; H_z = -\frac{\partial U_m}{\partial z}. \quad (13.65)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_m}{\partial z} \Big|_{r=r_1} &= -J_{1m} e^{j(\alpha z - \alpha z)}; \\ \frac{\partial U_m}{\partial z} \Big|_{r=r_2} &= +J_{2m} e^{j(\alpha z - \alpha z)}. \end{aligned}$$

Подставив сюда значения U_m из (13.62) и (13.63), получим для определения C_1 и C_2 уравнения

$$\begin{aligned} -j\alpha(C_1 I_{01} + C_2 K_{01}) &= -J_{1m}; \\ -j\alpha(C_1 I_{02} + C_2 K_{02}) &= +J_{2m}, \end{aligned}$$

причем здесь и ниже для краткости обозначим $I_{01} = I_0(\alpha r_1)$; $I_{02} = I_0(\alpha r_2)$; $K_{01} = K_0(\alpha r_1)$; $K_{02} = K_0(\alpha r_2)$.

Из этих уравнений получим

$$\begin{aligned} C_1 &= + \frac{J_{1m} K_{02} + J_{2m} K_{01}}{j\alpha(I_{01} K_{02} - I_{02} K_{01})} \Bigg| \\ C_2 &= - \frac{J_{1m} I_{02} + J_{2m} I_{01}}{j\alpha(I_{01} K_{02} - I_{02} K_{01})} \Bigg|. \end{aligned} \quad (13.66)$$

Таким образом, потенциал U_m определен и задачу можно считать решенной. Можно найти дополнительно величину магнитодвижущей силы (МДС) на один полюс или на один зазор. Намагничивающая сила равна разности значений U_m на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$:

$$F = U_m \Big|_{r=r_1} - U_m \Big|_{r=r_2}.$$

После использования равенств (13.63) и (13.66) получим

$$F = - \frac{j(J_{1m} + J_{2m})}{\alpha}.$$

На основании этого равенства модуль амплитуды намагничивающей силы

$$F = \frac{\tau}{\pi} (J_{1m} + J_{2m}). \quad (13.67)$$

Справедливость (13.67) вытекает также из физических представлений, поскольку величина намагничивающей силы на два полюса равна интегралу линейной токовой нагрузки на протяжении полюсного деления.

Индуктор с односторонней обмоткой. Когда обмотка расположена только на внешнем магнитопроводе, следует положить $J_{1m} = J_m$; $J_{2m} = 0$. Тогда на основании (13.69) и (13.72)

$$U_{Mm} = - \frac{jI_m}{\alpha} \frac{K_{02}I_0(\alpha r) - I_{02}K_0(\alpha r)}{I_{01}K_{02} - I_{02}K_{01}} \quad (13.68)$$

и амплитуда МДС согласно (13.67)

$$F = \frac{\tau}{\pi} J_m. \quad (13.69)$$

На основании (13.68) при $r = r_2$ имеем $U_{Mm} = 0$. При дальнейших операциях учтем, что [13.7]

$$\frac{d}{dr} I_0(\alpha r) = \alpha I_1(\alpha r); \quad \frac{d}{dr} K_0(\alpha r) = -\alpha K_1(\alpha r),$$

где $I_1(\alpha r), K_1(\alpha r)$ — модифицированные функции Бесселя 1-го порядка.

Тогда на основании (13.62), (13.65) и (13.68) амплитуды магнитной индукции

$$B_r = j\mu_0 J_m \frac{K_{02}I_1(\alpha r) + I_{02}K_1(\alpha r)}{I_{01}K_{02} - I_{02}K_{01}}; \quad B_z = \mu_0 J_m \frac{K_{02}I_1(\alpha r) - I_{02}K_0(\alpha r)}{I_{01}K_{02} - I_{02}K_{01}}. \quad (13.70)$$

Из (13.70) на поверхности $r = r_1$

$$B_{z1} = B_z|_{r=r_1} = \mu_0 J_m, \quad (13.71)$$

что соответствует элементарным физическим представлениям.

С точки зрения расчета машины существенный интерес представляет величина B_r на поверхности внешнего магнитопровода: $B_{r1} = B_r|_{r=r_1} = B_0$, которую можно принять за исходную расчетную величину, и величина B_r в средней части слоя жидкого металла, при $r = r_0$ (рис. 13.13): $B_\Delta = B_r|_{r=r_0}$.

Введем также дополнительно следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_1(\alpha r_1); \quad I_{12} = I_1(\alpha r_2); \quad I_{10} = I_1(\alpha r_0); \\ K_{11} &= K_1(\alpha r_1); \quad K_{12} = K_1(\alpha r_2); \quad K_{10} = K_1(\alpha r_0); \\ a &= I_{01}K_{10} + K_{01}I_{10}; \quad b = I_{02}K_{10} + K_{02}I_{10}; \quad c = I_{01}K_{02} - K_{01}I_{02}; \\ d &= I_{02}K_{11} + K_{02}I_{11}; \quad e = I_{01}K_{12} + K_{01}I_{12}. \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений на основании (13.70) получим

$$B_0 = \frac{\mu_0 J_m d}{c}; \quad B_\Delta = \frac{\mu_0 J_m b}{c}. \quad (13.72)$$

Согласно равенствам (13.72) коэффициент ослабления радиальной составляющей индукции в средней части слоя жидкого металла

$$k_H = \frac{B_0}{B_\Delta} = \frac{d}{b}. \quad (13.73)$$

Амплитуду МДС целесообразно выразить через B_Δ и величину зазора $\delta = r_1 - r_2$. Тогда на основании (13.69) и (13.73)

$$F = \frac{\delta k_s'' B_\Delta}{\mu_0}, \quad (13.74)$$

где

$$k_s'' = \frac{\tau}{\pi \delta} \frac{c}{b}. \quad (13.75)$$

Для упрощения можно принять $r_0 = 0,5(r_1 + r_2)$ и тогда k_π и k_s'' получим кривые [13.4], изображенные на рис. 13.14, 13.15. На рис. 13.15 прерывистой линией для сравнения изображена кривая k_π для плоского индуктора с двухсторонней обмоткой. Для индуктора с односторонней обмоткой действительны кривые рис. 13.14 и 13.15 при $r_0 / \tau = \infty$.

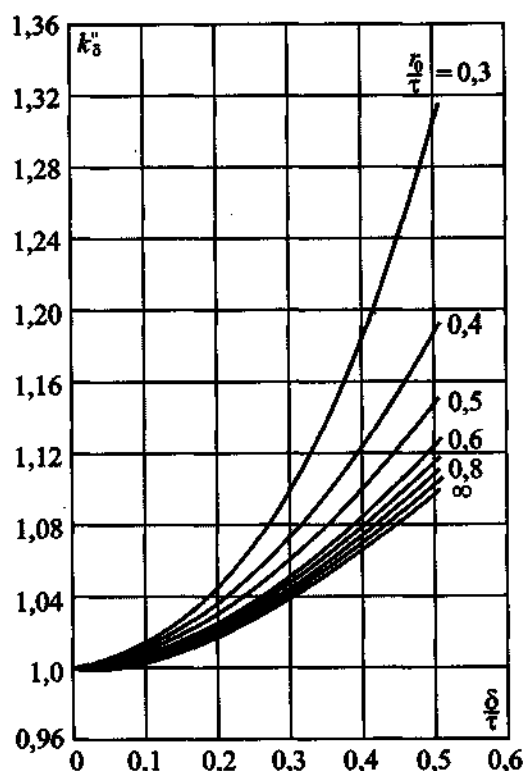


Рис. 13.14. Кривые коэффициента k_π цилиндрического индуктора

Индуктор без внутреннего магнитопровода. Выражения для этого случая получим, если положим $r_2 = 0$ и соответственно этому $I_{02} = 0$ и $K_{02} = \infty$. Тогда на основании (13.70)

$$B_r = j\mu_0 J_m \frac{I_1(\alpha r)}{I_{01}}; \quad B_z = \mu_0 J_m \frac{I_0(\alpha r)}{I_{01}}. \quad (13.76)$$

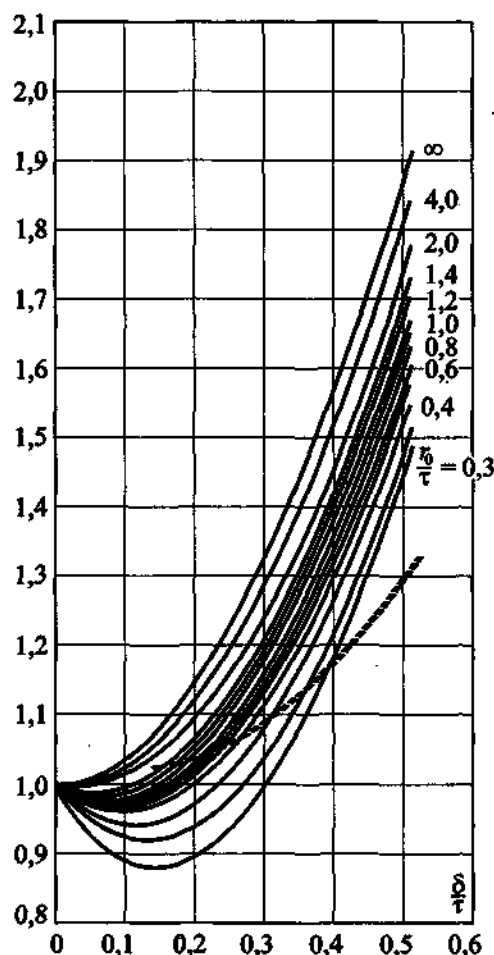


Рис. 13.15. Кривые коэффициента k_0'' цилиндрического индуктора

Контрольные вопросы к главе 13

- 13.1. Назовите основные электротехнические устройства, которые используют при работе перемещение ЭМП в пространстве.
- 13.2. Какие основные уравнения содержит аналитическая модель такого технического устройства?
- 13.3. Расскажите о принципе действия МГД преобразователей энергии.
- 13.4. Назовите перспективные области использования МГД преобразователей энергии.
- 13.5. Расскажите о принципе действия линейных синхронных двигателей и области их перспективного использования.

Библиографический список к главе 13

- 13.1. Специальные электрические машины. Источники и преобразователи энергии: в 2-х кн. — М.: Энергоатомиздат, 1993. — 320+368 с.
- 13.2. *Вольдек А. И.* Электрические машины. — М.: Энергия, 1974. — 460 с.
- 13.3. *Косыкин Ю. П., Цейтлин Л. А.* Синхронные машины с немагнитным ротором. — Л.: Энергоатомиздат, 1990. — 280 с.
- 13.4. *Вольдек А. И.* Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом. — Л.: Энергия, 1970. — 272 с.
- 13.5. *Аполлонский С. М.* Электромагнитное поле в неоднородных средах: Учеб. пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. — СПб.: Изд-во СЗТУ, 2006. — 538 с.
- 13.6. *Грей Э., Метьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их применения к физике и механике. — М.: ИИЛ, 1949. — 428 с.
- 13.7. *Лившиц П. С.* Скользящий контакт электрических машин. — М.: Энергия, 1974. — 128 с.

Глава 14

Электромагнитное поле в электротехнических устройствах

14.1. Поверхностный эффект в электротехнических устройствах

14.1.1. Явление поверхностного эффекта

Электротехнические устройства в качестве своих элементов имеют проводники, служащие для проведения электрического тока, и магнитопроводы, служащие для проведения магнитного потока. В тех случаях, когда электротехнические устройства связаны с источниками постоянного напряжения, возникающие токи и магнитные потоки равномерно распределяются по сечению соответствующих элементов. При питании устройства от источника переменного тока (например, синусоидального тока) возникающие в элементах токи и потоки распределяются по сечениям неравномерно. Переменный ток имеет наименьшую плотность на оси провода и наибольшую у его поверхности. Аналогично распределяется и переменный магнитный поток в проводящем теле.

Оба эти случая являются результатом поверхностного эффекта (скин-эффекта), связанного с неравномерным распределением ЭМП в проводящей среде из-за затухания электромагнитной волны.

Ранее было показано, что переменное ЭМП поле быстро затухает по мере проникновения в толщу проводящей среды. Это приводит к неравномерному распределению поля по сечению провода, а следовательно, к неравномерному распределению тока и магнитного потока. В установившемся режиме эти величины имеют максимальное значение у поверхности провода.

Поверхностный эффект в большинстве случаев вредное явление, так как он увеличивает сопротивление провода переменному току и магнитное сопротивление переменному магнитному потоку. В некоторых случаях явление поверхностного эффекта используется, например, в установках для индукционного поверхностного нагрева и закалки.

14.1.2. Поверхностный электрический эффект в прямоугольной шине

Решение такой задачи имеет очень важное значение в электромашиностроении. Все электрические машины имеют пазы на подвижной и на неподвижной частях (у ряда машин только на одной из частей — подвижной или неподвижной), в которые уложены обмотки, состоящие из проводников разной формы сечения (например, прямоугольной, круговой цилиндрической и т. д.). В этих проводниках проявляется электрический поверхностный эффект.

Расположим оси декартовой системы в соответствии с рис. 14.1, а. Обозначим: $\dot{I}$ — ток по шине, b — ширина, h — высота паза. Магнитная проницаемость шины μ . Магнитную проницаемость ферромагнитного материала, в котором сделан паз, полагаем очень большой, теоретически стремящейся к бесконечности. При этом допущении индукция в ферромагнитном материале будет конечна, а напряженность поля в нем будет стремиться к нулю. В шине $\vec{H}$ направлена по оси Oy , $\vec{E}$ — по оси Ox . Вектор Пойнтинга направлен по оси Oz . Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в шину через наружную поверхность msq и по мере проникновения в шину затухает по амплитуде.

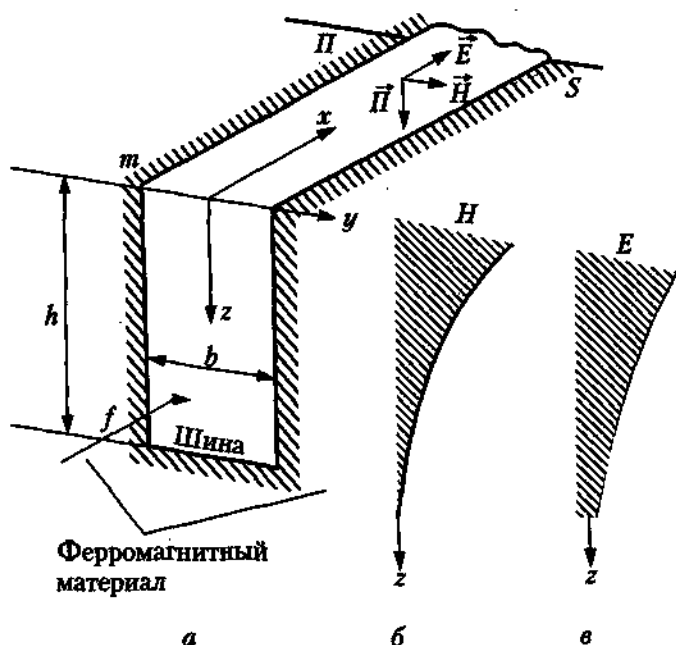


Рис. 14.1. Шина в пазу электрической машины

По закону полного тока при $z = 0$ $\dot{H} = \dot{I} / b$, а при $z = h$ $\dot{H} = 0$. Для определения постоянных интегрирования $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ в выражении

$$\dot{H} = \dot{A}_1 e^{\mu z} + \dot{A}_2 e^{-\mu z} \quad (14.1)$$

составим два уравнения

$$\dot{A}_1 + \dot{A}_2 = \dot{I}/b, \quad \dot{A}_1 e^{ph} + \dot{A}_2 e^{-ph} = 0.$$

После определения $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ и подстановки их в (14.1) получим

$$\dot{H} = \frac{\dot{I}}{b} \frac{\text{sh}[p(h-z)]}{\text{sh}(ph)}, \quad \dot{\vec{E}} = \dot{E}_x \vec{e}_x = \dot{E} \vec{e}_x, \quad (14.2)$$

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} = \frac{p}{\gamma b} \frac{\dot{I} \text{ch}[p(h-z)]}{\text{sh}(ph)}, \quad \dot{\vec{\delta}} = \gamma \dot{\vec{E}}. \quad (14.3)$$

Графики модулей H и E по высоте шины изображены на рис. 14.1, б, в.

14.1.3. Поверхностный электрический эффект в круговом цилиндрическом проводнике

Предположим, что характеристики ЭМП изменяются во времени по гармоническому закону. Совместим ось z круговой цилиндрической системы координат $\{r, \varphi, z\}$ с осью провода (рис. 14.2). Провод считаем длинным, что позволяет пренебречь краевыми эффектами (пренебречь изменениями по оси z) и рассматривать изменения характеристик лишь по радиусу r (из-за симметрии проводника характеристики поля не зависят от угла φ). Электрическая напряженность $\dot{\vec{E}}$ ЭМП имеет только осевую составляющую $\{0, 0, \dot{E}_z\}$, а магнитная напряженность $\dot{\vec{H}}$ — только касательную составляющую $\{0, \dot{H}_\varphi, 0\}$. Целью решения является определить, как изменяются плотность тока $\dot{\vec{\delta}}$ и $\dot{\vec{H}}$ по радиусу проводника r . Пренебрежем влиянием обратного провода.

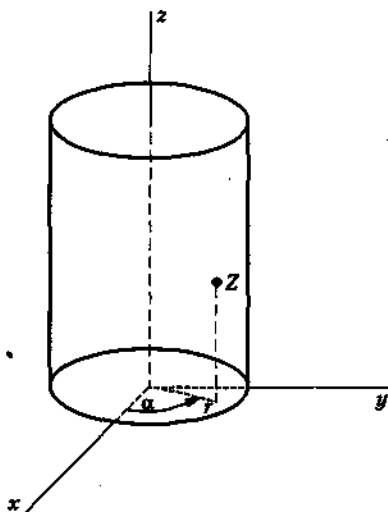


Рис. 14.2. Круговой цилиндрический проводник

Исходные уравнения Максвелла запишем в виде

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{\delta}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -\frac{\partial \mu \dot{\vec{H}}}{\partial t} = -j\omega \mu \dot{\vec{H}}. \quad (14.4)$$

Принимая во внимание, что в проводнике основным током при разумных частотах ($f < 10^4$ Гц) является ток проводимости, т. е. $\dot{\vec{\delta}} = \gamma \dot{\vec{E}}$, следовательно, $\operatorname{rot} \dot{\vec{\delta}} = -j\omega \mu \gamma \dot{\vec{H}}$, после преобразований вида

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{\delta}} = -j\omega \mu \gamma \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = -j\omega \mu \gamma \dot{\vec{\delta}}. \quad (14.5)$$

Учитывая известное выражение векторного анализа

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{\delta}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{\delta}} - \Delta \dot{\vec{\delta}}$$

и подставляя его в (14.5), считая, что $\operatorname{div} \dot{\vec{\delta}} = 0$, получим

$$\Delta \dot{\vec{\delta}} = j\omega \mu \gamma \dot{\vec{\delta}}. \quad (14.6)$$

Если теперь подставим в (14.6) выражение векторного лапласиана в круговой цилиндрической системе координат r, φ, z из приложения, то получим

$$\frac{d^2 \dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}}{dr} = j\omega \mu \gamma \dot{\delta}. \quad (14.7)$$

Поскольку плотность электрического тока изменяется только по радиальной координате, то мы в (14.7) перешли к скалярному уравнению для комплексных величин и от частных производных — к полным производным. Если ввести обозначение $q^2 = -j\omega \mu \gamma$, то (14.7) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 \dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}}{dr} + q^2 \dot{\delta} = 0$$

или

$$\frac{d^2 \dot{\delta}}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d\dot{\delta}}{d(qr)} + \dot{\delta} = 0. \quad (14.8)$$

Уравнение (14.8) представляет уравнение типа Бесселя при $x = qr$ и $y = \dot{\delta}$, его решение (например, [14.2]) записывается в виде

$$\dot{\delta} = A J_0(qr) + B N_0(qr), \quad (14.9)$$

где $J_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка 1-го рода, $N_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка 2-го рода.

Функция $N_0(qr) \rightarrow \infty$ при $qr \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$), что противоречит физическим представлениям. Поэтому принимаем $B \equiv 0$. Тогда

$$\dot{\delta} = A J_0(qr).$$

Магнитная напряженность $\dot{H}$ находится из уравнения

$$\dot{H} = \frac{1}{q^2} \operatorname{rot} \dot{\delta}$$

в виде

$$\dot{H} = -\frac{1}{q^2} \frac{d}{dr} [\dot{A} J_0(qr)] = -\frac{\dot{A}}{q^2} \frac{d[J_0(qr)]}{d(qr)} \frac{d(qr)}{dr} = -\frac{\dot{A}}{q^2} q [-J_1(qr)],$$

то есть

$$\dot{H} = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qr), \quad (14.10)$$

где $J_1(qr)$ — функция Бесселя 1-го рода первого порядка.

Для определения постоянной интегрирования $\dot{A}$ воспользуемся законом полного тока. При $r = a$

$$\frac{\dot{I}}{2\pi a} = \frac{\dot{A}}{q} (J_1(qa)),$$

откуда

$$\dot{A} = \frac{\dot{I}q}{2\pi a J_1(qa)}.$$

Тогда

$$\delta = \frac{q \dot{I} J_0(qr)}{2\pi a J_1(qa)}, \quad \dot{H} = \frac{\dot{I} J_1(qr)}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (14.11)$$

В центре провода ($r = 0$) — $J_0(0) = 1$:

$$\delta_0 = \frac{q \dot{I}}{2\pi a J_1(qa)}, \quad \dot{H} = \delta_0 J_0(qr).$$

Комплексные функции Бесселя $J_0(qr)$, $J_1(qr)$ можно представить в экспоненциальной форме в виде

$$J_0(qr) = b_0 e^{j\beta_0}, \quad J_1(qr) = b_1 e^{j\beta_1},$$

где b_0, b_1 — модули; β_0, β_1 — аргументы функций. Их значения даны в табл. 14.1.

Таблица 14.1. Таблица модулей и аргументов функций $J_0(qr)$ и $J_1(qr)$

$r\sqrt{\omega\gamma\mu}$	b_0	β_0	b_1	β_1
0	1	0	0	-45,00
1	1,015	14,22	0,501	-37,84
2	1,229	52,28	1,041	-16,73
3	1,95	96,52	1,80	15,71
4	3,439	138,19	3,173	53,90
5	6,231	178,93	5,812	93,55
6	11,501	219,62	10,850	133,45

$r\sqrt{\omega\gamma\mu}$	b_0	β_0	b_1	β_1
7	21,548	260,29	20,50	173,51
8	40,82	300,92	39,07	213,69
9	77,96	341,52	74,97	253,95
10	149,8	382,10	144,58	294,27

14.1.4. Поверхностный магнитный эффект в плоском ферромагнитном листе

Для уменьшения потерь на вихревые токи и для более равномерного распределения магнитного потока по сечению магнитопроводы мощных электротехнических устройств (электрических машин, трансформаторов и т. д.) собираются из ферромагнитных листов, изолированных друг от друга. Рассмотрим, как распределяется магнитный поток в одном из таких листов.

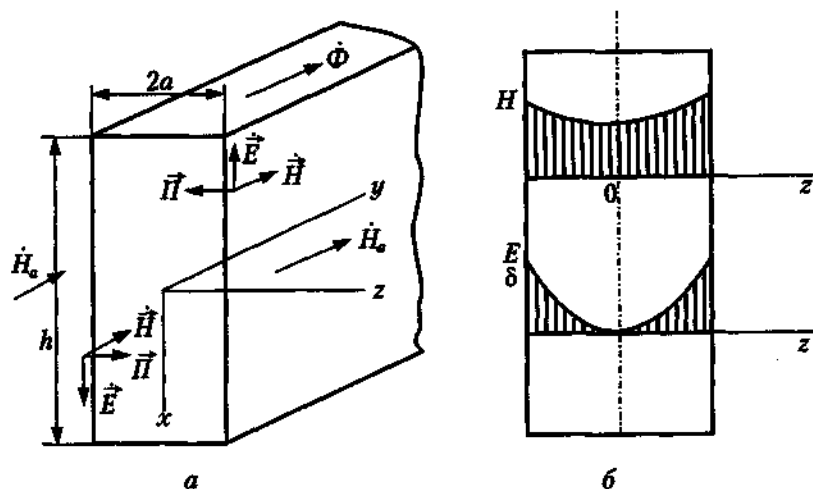


Рис. 14.3. Плоский ферромагнитный лист

Пусть в плоском листе толщиной a , высотой h и длиной l направление магнитного потока совпадает с осью Oy (рис. 14.3, а) и магнитный поток изменяется во времени синусоидально. Как и в расчете, при равномерном распределении потока по сечению принимается, что $h \gg a$, $l \gg a$ и $\gamma = \text{const}$. Тогда искажением поля у краев пластины можно пренебречь и считать, что в пластину с двух сторон проникает плоская электромагнитная волна, для которой справедливы уравнения (14.4). Следовательно, опуская индексы x и y , можно написать:

$$\dot{H} = \dot{A}_1 e^{-\gamma z} + \dot{A}_2 e^{\gamma z}, \quad \dot{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz}, \quad (14.12)$$

где по-прежнему $p = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1+j)k$.

Соответственно комплексное значение индукции

$$\dot{B} = \dot{A}_1 \mu e^{-pz} + \dot{A}_2 \mu e^{pz}. \quad (14.13)$$

Поскольку электромагнитные волны входят в лист с двух сторон, то значения индукции $\dot{B}$ при $z = \pm 0,5a$ равны между собой. Это приводит к равенству $\dot{A}_2 = \dot{A}_1$.

Таким образом,

$$\dot{B} = \dot{A}_1 \mu (e^{-pz} + e^{pz}) = 2\dot{A}_1 \mu \operatorname{ch}(pz) = \dot{B}_0 \operatorname{ch}(pz), \quad (14.14)$$

$$\delta = \gamma \dot{E} = -\frac{d\dot{H}}{dz} = -\frac{\dot{B}_0 p}{\mu} \operatorname{sh}(pz), \quad (14.15)$$

где $\dot{B}_0 = 2\dot{A}_1 \mu$ — комплексное действующее значение индукции в середине сечения листа ($z = 0$).

Среднее значение комплексного действующего значения вектора магнитной индукции

$$\dot{B}_\varphi = \frac{1}{a} \int_{-0,5a}^{0,5a} \dot{B} dz = \frac{\dot{B}_0}{a} \int_{-0,5a}^{0,5a} \operatorname{ch}(pz) dz = 2 \frac{\dot{B}_0}{pa} \operatorname{sh}\left(\frac{pa}{2}\right). \quad (14.16)$$

Переход от комплексных к действующим значениям требует вычисления модулей комплексных $\operatorname{sh}(pz)$, $\operatorname{ch}(pz)$ и p :

$$|\operatorname{sh}(pz)|^2 = \operatorname{sh}(kz + jkz) \operatorname{sh}(kz - jkz) = 0,5[\operatorname{ch}(2kz) - \cos(2kz)],$$

$$|\operatorname{ch}(pz)|^2 = \operatorname{ch}(kz + jkz) \operatorname{ch}(kz - jkz) = 0,5[\operatorname{ch}(2kz) + \cos(2kz)],$$

$$|p| = \sqrt{2}k.$$

Таким образом,

$$B = B_0 \sqrt{0,5[\operatorname{ch} 2kz + \cos 2kz]}, \quad \delta = \frac{kB_0}{\mu} \sqrt{0,5[\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz]},$$

$$B_\varphi = \frac{B_0}{ka} \sqrt{\operatorname{ch}(ka) - \cos(ka)}.$$

Наибольшее значение индукция имеет у поверхности листа:

$$B_s = B_0 \sqrt{0,5[\operatorname{ch}(ka) + \cos(ka)]}. \quad (14.17)$$

Зависимости действующих значений вектора магнитной индукции и вектора плотности тока от координаты z представлены на рис. 14.3, б.

При значении параметра $ka = \sqrt{0,5\omega\mu\gamma} a = 2$, что имеет место при $f = 400$ Гц, $\mu = 1000\mu_0$, $\gamma = 10^7$ См/м и $a = 0,5$ мм, отношение $B_s/B_0 = 1,3$, но уже при $ka = 4$, т. е. $a = 1$ мм, $B_s/B_0 = 3,7$. Поэтому неравномерность распределения магнитного потока по сечению может считаться допустимой при значениях $ka < 2$.

Мощность потерь на вихревые токи в единице объема листа

$$P_0 = \frac{\delta^2}{\gamma} = \frac{\omega B_0^2}{2\mu} [\operatorname{ch}(2kz) - \cos(2kz)] = \frac{\omega k^2 a^2 B_\varphi^2}{2\mu} \cdot \frac{\operatorname{ch}(2kz) - \cos(2kz)}{\operatorname{ch}(ka) - \cos(ka)}. \quad (14.18)$$

Потери во всем листе

$$P = \int_{-0.5a}^{0.5a} P_0 l h dz = B_\varphi^2 \frac{\omega k a}{2\mu} \cdot \frac{\operatorname{sh}(ka) - \sin(ka)}{\operatorname{ch}(ka) - \cos(ka)}. \quad (14.19)$$

При $ka \ll 1$ эти потери определяются формулой

$$P_{0\varphi} = \frac{\pi^2}{3} f^2 \gamma a^2 B_\varphi^2, \quad (14.20)$$

совпадающей с выведенной в предположении равномерного распределения потока.

Так как $ka = \sqrt{0,5\omega\mu} a$, то при увеличении частоты для сохранения той же величины потерь приходится уменьшать толщину листа или применять пресованные сердечники из ферритов.

14.2. Эффект близости для двух параллельных токопроводящих шин

Рассмотренное неравномерное распределение магнитного потока и тока по сечению проводника относится к уединенному проводнику. Если близко расположены несколько проводников с переменными токами, то неравномерное распределение тока в каждом из проводников будет определяться не только его собственным полем, но и полями остальных проводников. Это явление называется эффектом близости и имеет существенное значение для некоторых электротехнических устройств.

Пусть две плоские шины толщиной a , высотой $h \gg a$ расположены параллельно друг другу на расстоянии $b \ll h$ (рис. 14.4).

Длина шин $l \gg b$ и искажения поля у концов и краев шин в расчете не учитываются. Материал шин обладает постоянными магнитной проницаемостью μ и удельной проводимостью γ . По шинам протекают в разных направлениях токи $\vec{I}$ частоты ω , одинаковые по величине.

Оси координат указаны на рис. 14.4, а. Начало координат находится посередине между шинами.

При принятых условиях поле является плоскопараллельным и вектор $\vec{H}$ имеет практически лишь одну составляющую $\vec{H}_y = \vec{H}$. Все величины являются функцией только одной координаты x .

Так же как и в разделе 14.1.2, общее решение уравнения для комплексного действующего значения напряженности МП имеет вид

$$\vec{H} = \vec{A}_1 e^{-px} + \vec{A}_2 e^{px}, \quad (14.21)$$

где $p = \sqrt{j\omega\mu\gamma}$.

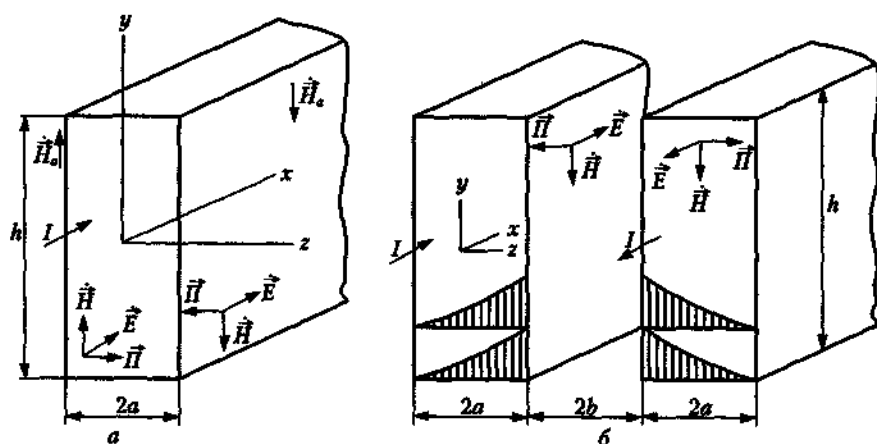


Рис. 14.4. Две плоские параллельно расположенные шины

Из закона полного тока, примененного к двум контурам, один из которых охватывает одну шину, а другой — обе шины, следует, что напряженность поля между шинами неизменна и равна $\dot{I}/h$, а на внешних поверхностях обеих шин — равна нулю из-за взаимной компенсации обеих шин.

Таким образом, для правой шины при $x = 0,5b$

$$\dot{A}_1 e^{-0,5pb} + \dot{A}_2 e^{0,5pb} = \frac{\dot{I}}{h}, \quad (14.22)$$

при $x = 0,5b + a$

$$\dot{A}_1 e^{-p(0,5b+a)} + \dot{A}_2 e^{p(0,5b+a)} = 0. \quad (14.23)$$

Из уравнений (14.19), (14.20) находят постоянные интегрирования:

$$\dot{A}_1 = \frac{\dot{I}}{h} \cdot \frac{e^{0,5pb}}{1 - e^{-2pa}}, \quad \dot{A}_2 = -\frac{\dot{I}}{h} \cdot \frac{e^{-p(0,5b+2a)}}{1 - e^{-2pa}}. \quad (14.24)$$

Следовательно,

$$\dot{H} = \frac{\dot{I}}{h} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2pa}} [e^{-p(x-0,5b)} - e^{p(x-0,5b-2a)}]. \quad (14.25)$$

Вектор плотности тока δ имеет лишь одну составляющую $\delta_x = \delta$, поэтому

$$\delta = \frac{d\dot{H}}{dx} = -\frac{\dot{I}}{h} \cdot \frac{p}{1 - e^{-2pa}} [e^{-p(x-0,5b)} + e^{p(x-0,5b-2a)}]. \quad (14.26)$$

Для левой шины получаются аналогичные формулы.

Из выражения для плотности тока (14.26) видно, что распределение тока по сечению шины несимметрично по отношению к оси симметрии ее сечения. Плотность тока больше у внутренней поверхности (рис. 14.4, б). При этом возрастает активное сопротивление шин. Из-за сближения прямого и обратного токов уменьшается площадь контура, а следовательно, и его индуктивность.

При одинаковом направлении токов в обеих шинах плотность тока будет наименьшей у внутренних поверхностей шин и наибольшей у наружных.

Эффект близости используется в индукционном поверхностном нагреве. Если контур с током высокой частоты (индуктор) приблизить к поверхности нагреваемого тела, то вблизи поверхности возникает индуцированный ток. Из-за эффекта близости путь индуцированного в теле тока повторяет форму индуктора, так как индуцированный в теле ток находится в противофазе с током индуктора, что качественно соответствует рассмотренному примеру. Тем самым создается нагрев поверхности в требуемых местах. Этот метод широко используется для поверхностной закалки стальных изделий сложной формы.

14.3. Распространения электромагнитного поля в коаксиальном кабеле

Рассмотрим передачу энергии по коаксиальному кабелю длиной l от генератора с постоянной ЭДС E к нагрузке с сопротивлением R_H (рис. 14.5). Удельная проводимость внутренней жилы кабеля и наружного цилиндра (оболочки) — γ .

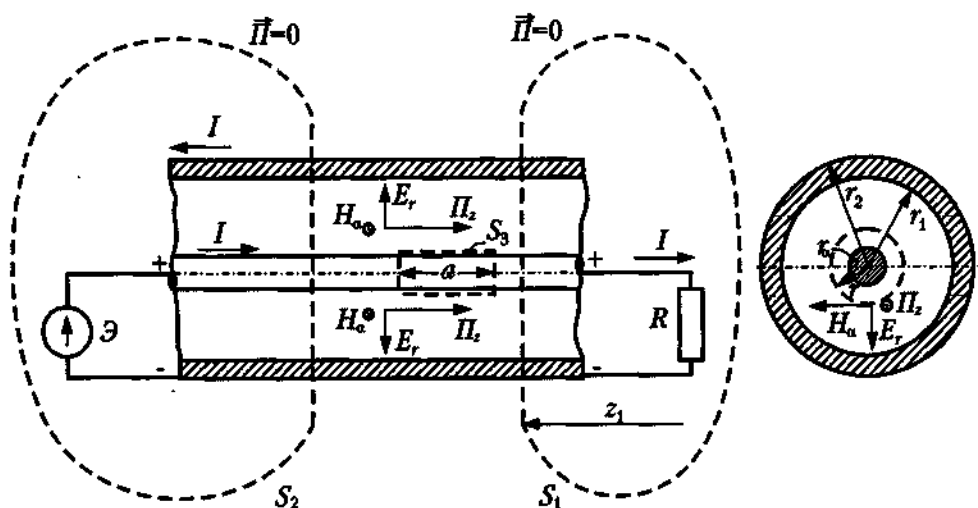


Рис. 14.5. Распространение ЭМП в коаксиальном кабеле

Для того чтобы судить о распространении энергии в пространстве, необходимо найти вектор Умова–Пойнтинга в сечении, перпендикулярном оси кабеля на расстоянии z от его конца.

Ток в кабеле находится в виде

$$I = \frac{E}{R_H + R_K},$$

где

$$R_K = \frac{l}{\pi r_0^2} + \frac{l}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = lR_0 \quad (14.27)$$

представляет собой сумму сопротивлений внутренней жилы и оболочки кабеля, а R_0 — сопротивление единицы длины кабеля.

Напряжение между жилой и оболочкой в рассматриваемом сечении

$$U_i = I(R_H + R_0 z_l). \quad (14.28)$$

Радиальная составляющая напряженности ЭП в любой точке изолирующего слоя на расстоянии r от оси кабеля в этом сечении равна

$$E_r = \frac{U_i}{r \ln \frac{r_1}{r_0}} \quad \text{при } r_0 < r < r_1. \quad (14.29)$$

Кроме радиальной составляющей, напряженность поля в изолирующем слое имеет и осевую (продольную) составляющую E_z . Вне кабеля $E_r = 0$ при $r > r_2$.

Напряженность МП в изолирующем слое по закону полного тока

$$H = H_\alpha = \frac{I}{2\pi r} \quad (14.30)$$

и направлена перпендикулярно радиусу r рассматриваемой точки и оси кабеля. Вне кабеля $H = 0$. Зная плотность тока в жиле

$$\delta_{1z} = \frac{I}{\pi r_0^2} \quad (14.31)$$

и в оболочке

$$\delta_{2z} = \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}, \quad (14.32)$$

можно найти осевую составляющую напряженности ЭП в жиле и в оболочке:

$$E_{1z} = \frac{1}{\gamma} \delta_{1z}, \quad E_{2z} = \frac{1}{\gamma} \delta_{2z}. \quad (14.33)$$

На поверхностях жилы и оболочки согласно граничным условиям нормальная составляющая напряженности ЭП терпит разрыв, и если в изоляции напряженность ЭП имеет значительную радиальную составляющую E_r , то в проводнике $E_r = 0$.

Напряженность МП внутри проводов направлена так же, как и в изоляции, и по закону полного тока

$$H = H_\alpha = \frac{Ir}{2\pi r_0^2} \quad \text{при } r < r_0,$$

$$H = H_\alpha = \frac{I(r_2^2 - r^2)}{2\pi r(r_2^2 - r_1^2)} \quad \text{при } r_2 > r > r_1. \quad (14.34)$$

Найдем теперь вектор Умова–Пойнтинга $\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$ в различных точках кабеля. Вектор $\vec{P}$ имеет две составляющие: осевую P_z , определяемую радиальной составляющей напряженности ЭП — E_r , так что $P_z = E_r H_\phi = E_r H$, и радиальную составляющую P_r , определяемую осевой составляющей напряженности ЭП — E_z , так что $P_r = E_z H_\phi = E_z H$ (рис. 14.6).

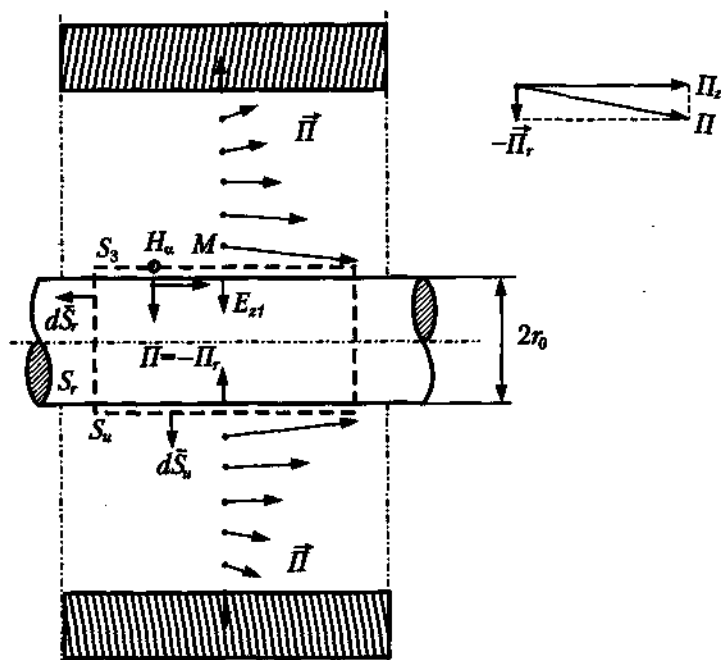


Рис. 14.6. Распределение вектора Умова–Пойнтинга в коаксиальном кабеле

В изоляции кабеля радиальная составляющая напряженности ЭП практически всегда значительно превышает осевую, и, следовательно, осевая составляющая вектора Умова–Пойнтинга по мере удаления от оси кабеля убывает обратно пропорционально квадрату радиуса:

$$P_z = \frac{U_1 I}{2\pi r^2 \ln(r_1/r_2)}. \quad (14.35)$$

Таким образом, электромагнитная энергия, распространяясь вдоль кабеля, имеет большую плотность ближе к внутренней жиле кабеля.

Наличие хотя и небольшой осевой составляющих напряженности ЭП приводит к тому, что вблизи поверхности проводника и внутри его имеется радиальная составляющая вектора Умова–Пойнтинга P_r .

Эта составляющая вектора $\vec{P}$ направлена внутрь проводов кабеля и выражает собой плотность потока энергии, идущей в единицу времени на нагрев проводов кабеля. Естественно, чем больше γ , тем меньше эта составляющая. Внутри проводов $P_r = 0$, так как $E_z = 0$.

На рис. 14.6 схематически показан вектор Умова–Пойнтинга в изоляции, в жиле и в оболочке кабеля.

Рассмотрим несколько различных замкнутых поверхностей и убедимся, что поток вектора Умова–Пойнтинга, входящий внутрь этих поверхностей, равен мощности, потребляемой внутри этих поверхностей.

Для поверхности S_1 (см. рис. 14.5) поток вектора Умова–Пойнтинга, входящий внутрь этой поверхности, выразится в виде

$$\int_{S_1} \vec{P}_r 2\pi r dr = \int_{r_0}^{r_1} \frac{U_1 I}{r \ln(r_1/r_0)} dr = U_1 I. \quad (14.36)$$

Интегрирование производилось только в пределах изоляции кабеля, так как внутри проводов вектор $\vec{P}$ лежит в плоскости интегрирования нормальной оси кабеля $\vec{P} = \vec{P}_r$, а вне кабеля $H = 0$ и, следовательно, $\vec{P} = 0$. Результат интегрирования дает общую мощность, выделяющуюся в нагрузке и в проводах кабеля внутри поверхности интегрирования.

Для поверхности S_2 аналогично (14.35) поток вектора $\vec{P}$, входящий внутрь этой поверхности, равен $-U_2 I$. Отрицательный знак означает, что потребление мощности внутри области интегрирования отрицательно или что в данном объеме вырабатывается энергии больше, чем потребляется.

Для поверхности S_3 , окружающей подобно чулку участок внутренней жилы кабеля длиной a , получаем, что на торцевых участках поверхности ($S_T = \pi r_0^2$) вектор $\vec{P}$ лежит в плоскости интегрирования $\vec{P}_r = 0$, $\vec{P} = \vec{P}_r$, а на остальной цилиндрической части поверхности ($S_4 = 2\pi r_0 a$) его радиальная составляющая P_r нормальна к поверхности интегрирования и постоянна по величине:

$$-P_r = -E_{1r} H_a = -\frac{I^2}{2\pi^2 \gamma r_0^3}. \quad (14.37)$$

В таком случае, интегрируя вектор Умова–Пойнтинга по поверхности S_3 , получаем

$$-\oint_{S_3} \vec{P} d\vec{s} = -\int_{S_T} \vec{P} d\vec{s} - \int_{S_4} \vec{P} d\vec{s} = 0 - \int_{S_4} -P_r d\vec{s} = P_r S_4 = \frac{I^2 a}{\pi \gamma r_0^2}, \quad (14.38)$$

здесь первый интеграл обращается в нуль, так как $\vec{P} \perp S_T$. Следовательно, поток вектора Умова–Пойнтинга входящий через рассматриваемую поверхность S_3 , равен мощности, идущей на нагрев участка жилы, находящегося внутри поверхности S_3 .

Из рассмотренного примера видно, что распространение электромагнитной энергии от источника к потребителю не происходит по проводам, как это иногда неправильно говорится. Энергия движется в пространстве вдоль проводов, а провода являются направляющими, концентрирующими передаваемую энергию и поглощающими ее часть, идущую на их нагрев. Если воспользоваться аналогией между передачей электроэнергии «по проводам» и движением воды в канале, то прилегающая к проводам непроводящая среда является вместилищем

электромагнитной энергии и аналогична объему, заполняемому водой в канале, а поверхность проводов аналогична поверхности воды в канале. Расход электрической энергии на нагрев проводов аналогичен потерям воды, просачивающейся в грунт берегов и дна канала, а также испаряющейся с ее открытой поверхности.

Теорема Умова–Пойнтинга дает возможность судить о передаче и распространении электромагнитной энергии как в линиях электропередач, так и в различных электротехнических устройствах.

Контрольные вопросы к главе 14

- 14.1. Что такое электрический поверхностный эффект?
- 14.2. Что такое магнитный поверхностный эффект?
- 14.3. Что такое эффект близости?
- 14.4. Как рассчитать электрический поверхностный эффект?
- 14.5. Что происходит с активным сопротивлением среды при наличии электрического поверхностного эффекта?
- 14.6. При каких частотах проводник не проводит ток?
- 14.7. Как распространяется электромагнитная энергия по коаксиальному кабелю?
- 14.8. Что представляет собой вектор Умова–Пойнтинга и как его рассчитать?

Библиографический список к главе 14

- 14.1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М.: Высш. школа, 1978. — 231 с.
- 14.2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1971. — 576 с.
- 14.3. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 2. Ч. 4: Теория электромагнитного поля. — Л.: Энергия, 1967. — 234 с.
- 14.4. Нетушил А. В., Поливанов К. М. Основы электротехники. Ч. 3: Теория электромагнитного поля. — М., Л.: ГЭИ, 1956. — 191 с.

Глава 15

Специальные функции в уравнениях математической физики

15.1. Функции Лежандра

15.1.1. Дифференциальное уравнение Лежандра

Функциями Лежандра (или сферическими функциями) называются решения дифференциального уравнения

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \left[v(v+1) - \frac{\mu}{1-z^2} \right] w = 0. \quad (15.1.1)$$

Здесь z — комплексная переменная, постоянные v, μ , называемые параметрами, также могут быть произвольными комплексными числами. В дальнейшем предполагаем, что параметры являются натуральными числами: $v = n$, $\mu = m$.

В частном случае $m = 0$ получается дифференциальное уравнение Лежандра:

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + v(v+1)w = 0. \quad (15.1.2)$$

Уравнение (15.1.2) при $v = n \geq 0$ имеет своим решением полином $P_n(z)$, который называется *полиномом Лежандра 1-го рода* n -й степени (функцией Лежандра 1-го рода или зональной гармонической сферической функцией 1-го рода).

Второе решение, линейно независимое от первого, называется *функцией Лежандра 2-го рода* (или зональной гармонической сферической функцией 2-го рода). Она является бесконечнозначной аналитической функцией z , точками ветвления которой будут ± 1 . На интервале $-1 < x < 1$ действительной оси эта функция будет действительной однозначной функцией, которую далее будем обозначать через $Q_n(x)$.

Для произвольного комплексного индекса v дифференциальное уравнение Лежандра имеет два решения $P(z)$, $Q(z)$, которые являются аналитическими функциями от v и обращаются в $P_n(z)$, $Q_n(z)$ при $v = n$. Очевидно,

$P_{-v-1}(z) = P_v(z)$. Функции $P_n(z)$, $Q_n(z)$ — бесконечнозначные, точками ветвления для $P_n(z)$ будут -1 и ∞ , для $Q_n(z)$ ± 1 и ∞ .

Решение при $m \neq 0$ может быть выражено через решение при $m = 0$. В общем случае $v = n$, $\mu = m \neq 0$ в качестве решений дифференциального уравнения получаем *присоединенные функции Лежандра 1-го рода* $P_n^m(z)$ и *2-го рода* $Q_n^m(z)$. Здесь n называется степенью, а m — порядком функции. На действительной оси между точками -1 и 1 обе функции будут действительными и обозначаются через $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$.

15.1.2. Функции Лежандра 1-го рода

Полином (функция) Лежандра $P_n(z)$ n -й степени может быть определен как

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n. \quad (15.1.3)$$

С помощью производящей функции $[1 - 2zr + r^2]^{-0.5}$ можно получить полиномы Лежандра из разложения (выполняющегося для $|r| < \min |z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$)

$$[1 - 2zr + r^2]^{-0.5} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) r^n$$

или из разложения (выполняющегося для $|r| > \max |z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$)

$$[1 - 2zr + r^2]^{-0.5} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \frac{1}{r^{n+1}}.$$

Разложение $P_n(z)$ по степеням z имеет вид

$$P_n(z) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \left[z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} z^{n-4} - \dots \right].$$

Для действительного аргумента $x = \cos \theta$ имеем тригонометрическое представление

$$P_n(\cos \theta) = 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \left[\cos n\theta + \frac{1}{1} \cdot \frac{n}{2n-1} \cos(n-2)\theta + \right. \quad (15.1.4) \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \cos(n-6)\theta + \dots \right].$$

Если n — нечетное целое число, то сумма кончается на члене с $\cos \theta$; если n — четное — на члене, не зависящем от $\cos \theta$, причем этот член умножается дополнительно на 0,5.

15.1.3. Функции Лежандра 2-го рода

Функции Лежандра 2-го рода при предположениях, сделанных выше относительно их определения, могут быть при $-1 < x < 1$ представлены в виде

$$Q_n(x) = P_n(x) \operatorname{arctg} x - W_{n-1}(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - W_{n-1}(x), \quad (15.1.5)$$

а для комплексного аргумента z вне отрезка $-1 \leq x \leq 1$ действительной оси — в виде

$$Q_n(z) = P_n(z) \operatorname{arctg} z - W_{n-1}(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{z+1}{z-1} - W_{n-1}(z). \quad (15.1.6)$$

Подробнее о сферических функциях см. в [15.1].

15.2. Цилиндрические функции

15.2.1. Уравнение цилиндрических функций

При решении многих задач математической физики приходят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

называемому *уравнением цилиндрических функций n -го порядка*. Это уравнение часто называют *уравнением Бесселя n -го порядка*.

Характерными задачами, приводящими к цилиндрическим функциям, являются краевые задачи для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

вне или внутри кругового цилиндра в случае трех независимых переменных, вне или внутри круга.

К уравнению цилиндрических функций (уравнению Бесселя) можно прийти, решая методом Фурье уравнения Лапласа, теплопроводности или колебаний, записанные в цилиндрических координатах. Покажем это на примере уравнения Лапласа. Известно, что уравнение Лапласа в цилиндрических координатах r, φ, z имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (15.2.1)$$

где $u = u(r, \varphi, z)$ — искомая функция. Используя метод Фурье, будем искать частные решения уравнения Лапласа в виде

$$u(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z). \quad (15.2.2)$$

Подставляя (15.2.1) в (15.2.2), имеем

$$R''\Phi Z + \frac{1}{r} R'\Phi Z + \frac{1}{r^2} R\Phi''Z + R\Phi Z'' = 0,$$

или, разделив обе части равенства на $R\Phi Z$,

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{Z''}{Z} = a,$$

где a — постоянная. Отсюда имеем

$$Z'' + aZ = 0; \quad (15.2.3)$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = a. \quad (15.2.4)$$

Уравнение (15.2.4) умножим на r^2 и приведем к виду

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - ar^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = b,$$

где b — постоянная. Отсюда получаем

$$\Phi'' + b\Phi = 0, \quad (15.2.5)$$

$$r^2 R'' + rR' - (ar^2 + b)R = 0. \quad (15.2.6)$$

Таким образом, отыскание решений уравнения (15.2.2) в виде (15.2.3) привело к двум линейным дифференциальным уравнениям (15.2.3) и (15.2.5) с постоянными коэффициентами и к уравнению (15.2.6) — линейному, но с переменными коэффициентами. Предположим, что отыскиваются периодические по углу φ решения $u(u, \varphi, z)$ уравнения Лапласа, являющиеся одновременно апериодическими функциями координаты z (случай, часто встречающийся на практике). Этим условиям можно удовлетворить, если постоянные a, b выбрать в виде

$$a = -\lambda^2, b = \nu^2, \quad (15.2.7)$$

где λ, ν — любые вещественные числа.

Действительно, при этом уравнения (15.2.3) и (15.2.6) принимают вид

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0, \quad \Phi'' + \nu^2 \Phi = 0$$

и имеют общие решения требуемой структуры

$$Z = C_1 \operatorname{ch} \lambda z + C_2 \operatorname{sh} \lambda z, \quad \Phi = C_3 \cos \nu \varphi + C_4 \sin \nu \varphi,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

При выполнении равенств (15.2.7) уравнение (15.2.6) можно переписать так:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (\lambda^2 r^2 - \nu^2) R = 0. \quad (15.2.8)$$

Введем новую независимую переменную $\xi = \lambda r$. Тогда имеем

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = \lambda \frac{dR}{d\xi}, \quad \frac{d^2 R}{dr^2} = \lambda^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2},$$

и уравнение (15.2.8) приводится к виду

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - \nu^2) R = 0, \quad R = R(\xi). \quad (15.2.9)$$

Так как решение в цилиндрических координатах уравнений Лапласа, теплопроводности, колебаний и ряда других уравнений связано с решением уравнения (15.2.9), это уравнение называют **уравнением цилиндрических функций**. Уравнение (15.2.9) называют также **уравнением Бесселя**. Если в уравнении (15.2.9) заменить аргумент ξ на x , искомую функцию R — на y , то уравнение цилиндрических функций (уравнение Бесселя) принимает традиционно принятый вид:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2)y = 0. \quad (15.2.10)$$

Любые решения уравнения (15.2.10) называют **цилиндрическими функциями или функциями Бесселя**. Число v является параметром уравнения Бесселя. Для каждого значения v решение выражается двумя независимыми функциями, в общем случае называемыми функциями 1-го и 2-го рода, и может быть представлено в форме:

$$Z_v(x) = c_1 J_v(x) + c_2 Y_v(x), \quad (15.2.11)$$

где c_1 и c_2 — независимые постоянные, а $J_v(x)$ и $Y_v(x)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода порядка v .

15.2.2. Функции Бесселя 1-го и 2-го рода

Функции Бесселя 1-го рода обладают конечным значением при аргументе, обращающемся в нуль $J_0(0) = 1$, $J_1(0) = 1$.

Бессель дал функциям 1-го рода интегральное выражение:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta,$$

в котором пределы $0, 2\pi$ могут быть заменены пределами $\alpha, 2\pi + \alpha$. Аналогичное интегральное выражение может быть представлено через показательную функцию

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\theta - x \sin \theta)} d\theta.$$

Решая уравнение (15.2.11) посредством степенного ряда с неопределенными коэффициентами, можно получить следующие уравнения:

$$J_0(x) = 1 - \frac{u}{1!^2} + \frac{u^2}{2!^2} - \frac{u^3}{3!^2} + \dots,$$

$$J_1(x) = \sqrt{u} \left(1 - \frac{u}{1!2!} + \frac{u^2}{2!3!} - \frac{u^3}{3!4!} + \dots \right), \quad (15.2.12)$$

где $u = 0,25x^2$.

В самом деле, ищем частное решение уравнения (15.2.10) при $\nu = 0$ в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (15.2.13)$$

Для $x = 0$ имеем $y = a_0$ и $y' = a_1$. Но второй член в уравнении (15.2.10) обращается при $x = 0$ в бесконечность при любом конечном a_1 . Следовательно, в выражении (15.2.13) $a_1 = 0$. Подставляя выражение (15.2.13) в уравнение (15.2.10) и полагая $a_1 = 0$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \dots \\ (2a_2 + 2a_2 + a_0) + (2 \cdot 3 \cdot a_3 + 3a_3)x + (3 \cdot 4 \cdot a_4 + 4 \cdot a_4 + a_2)x^2 + \dots = \\ &= (2^2 a_2 + a_0) + 3^2 a_3 x + (4^2 a_4 + a_2)x^2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение (15.2.10) при $\nu = 0$ будет удовлетворять, если положить

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^2 4^2}, \dots, a_{2n+1} = 0$$

или

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \right) = a_0 J_0(x).$$

В тождественности полученного ряда при $a_0 = 1$ с приведенным выше выражением $J_0(x)$ нетрудно убедиться.

Из выражения (15.2.11) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} J_1(x) = 0, 5x, \\ J_0(x) &= J_0(-x); \quad J_1(x) = -J_1(-x); \quad J_1(x) = -J_0'(x). \end{aligned}$$

При комплексном аргументе $x = r e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} J_0(x) &= J_0(r e^{i\theta}) = 1 - \frac{(0,5r)^2 \cos 2\theta}{1!^2} + \frac{(0,5r)^4 \cos 4\theta}{2!^2} - \frac{(0,5r)^6 \cos 6\theta}{3!^2} + \dots - \\ &- i \left[\frac{(0,5r)^2 \sin 2\theta}{1!^2} - \frac{(0,5r)^4 \sin 4\theta}{2!^2} + \frac{(0,5r)^6 \sin 6\theta}{3!^2} - \dots \right], \\ J_1(x) &= J_1(r e^{i\theta}) = 0,5r \left[\cos \theta - \frac{(0,5r)^2 \cos 3\theta}{1 \cdot 2} + \frac{(r)^4 \cos 5\theta}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \dots + \right. \\ &\left. + i \left[\sin \theta - \frac{(0,5r)^2 \sin 3\theta}{1 \cdot 2} + \frac{(0,5r)^4 \sin 5\theta}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \dots \right] \right]. \end{aligned}$$

Из последних двух выражений можно видеть, что при чисто мнимом аргументе $\theta = \pm 0,5\pi$ функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ имеют: первая только действительное, а вторая — только мнимое значение.

Формулы приведения:

$$\begin{aligned} J_{v+1}(z) &= \frac{2v}{z} J_v(z) - J_{v-1}(z); \\ \frac{d}{dz} J_v(z) &= J_{v-1}(z) - \frac{v}{z} J_v(z) = \frac{1}{2} [J_{v-1}(z) - J_{v+1}(z)]; \\ \frac{d}{dz} z^v J_v(z) &= z^v J_{v-1}(z); \quad \frac{d}{dz} z^{-v} J_v(z) = -z^{-v} J_{v+1}(z); \\ J_{-n}(z) &= (-1)^n J_n(z) \text{ при целом } n. \end{aligned}$$

Функции Бесселя 2-го рода $Y_v(x)$ находятся как второе независимое решение уравнения Бесселя (15.2.10). Они не имеют конечного значения при аргументе, равном нулю.

При $v=0$ выражение $Y_0(x)$ может быть найдено следующим образом. Введем неопределенную функцию $u(x)$ и представим решение уравнения (15.2.10) при $v=0$ в виде

$$y = u J_0(x).$$

После дифференцирования получим

$$\frac{dy}{dx} = u' J_0(x) + u J_0'(x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = u'' J_0(x) + 2u' J_0'(x) + u J_0''(x).$$

Тогда из уравнения (15.2.10) при $v=0$

$$u'' J_0(x) + 2u' J_0'(x) + u J_0''(x) + \frac{1}{x} (u' J_0(x) + u J_0'(x)) + u J_0(x) = 0.$$

Сокращая на $J_0(x)$ и сделав приведения, получим

$$u'' + u' \left(2 \frac{J_0'(x)}{J_0(x)} + \frac{1}{x} \right) + \frac{u}{J_0(x)} \left(J_0''(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) + J_0(x) \right) = 0.$$

Имея в виду, что выражение, стоящее во вторых скобках, тождественно равно нулю, так как $J_0(x)$ является ранее найденным решением уравнения (15.2.10), окончательно находим

$$\frac{dq}{q} = - \left(\frac{1}{x} + 2 \frac{J_0'(x)}{J_0(x)} \right) dx,$$

где $q = u'(x)$.

Интегрируя, находим, что

$$\ln q = -\ln x - 2 \ln J_0(x) + \text{const}.$$

Подставляя const как $\ln B$, окончательно получим, что

$$q = \frac{dv}{dx} = \frac{B}{x(J_0(x))^2}.$$

Интегрируя вторично, получаем

$$v = A + B \int_a^x \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}.$$

Нижний предел интегрирования остается произвольным так же, как и зависящая от него постоянная A .

Таким образом, получаем, что

$$y = v J_0(x) = A J_0(x) + B J_0(x) \int_a^x \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}. \quad (15.2.14)$$

Множитель при произвольной постоянной B , т. е. второй член выражения (15.2.14), деленный на B , представляет собой искомое второе решение уравнения Бесселя. Имея в виду, что $J_0(x)$, стремится к единице при $x \rightarrow 0$, найдем значения интеграла при малых x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_a^x \frac{dx}{x[J_0(x)]^2} \rightarrow \int_a^x \frac{dx}{x} = \ln x - \ln a.$$

Имея, таким образом, выражение для искомой функции при $x \rightarrow 0$, можем представить ее в виде ряда

$$Y_0(x) = J_0(x) \ln x + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

Выбор постоянной b_0 , в которую входит и $\ln a$, остается произвольным. В зависимости от его выбора могут быть получены различные выражения для функций 2-го рода. Коэффициенты степенного ряда $b_1, b_2, \dots$ могут быть определены при подстановке решения в исходное уравнение. Выбор произвольной постоянной в приведенном выражении может быть сделан с учетом наиболее простого приближенного представления функции при больших значениях x .

По Веберу, функция 2-го рода нулевого порядка определяется выражением

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \left(\frac{x}{2} \right)^2 - \frac{(x/2)^4}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{(x/2)^6}{3^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right].$$

Так же как для функций 1-го рода,

$$-\frac{d}{dx} Y_0(x) = Y_1(x).$$

При малых значениях x имеем следующие выражения:

$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right), \text{ где } \gamma = 0,577216\dots$$

$$Y_1(x) \approx -\frac{2}{\pi x}.$$

При больших значениях x

$$Y_0(x) \approx \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi x/2}}, \quad Y_1(x) \approx -\frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi x/2}}, \quad Y_\nu(x) \approx \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)}{\sqrt{\pi x/2}}.$$

Как следует из приведенных выражений, функции 2-го рода от действительного переменного обращаются в нуль при неограниченном возрастании аргумента. При мнимом аргументе

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Y_0(\pm i x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x/2}} \pm i J_0(i x),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Y_1(\pm i x) = -[i^{-1} J_1(i x)] \pm i \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x/2}},$$

причем $\lim_{x \rightarrow \infty} J_0(ix) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} J_1(ix) = i \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$

При комплексном аргументе $x\sqrt{\pm i}$ функции 2-го рода также неограниченно возрастают с ростом x .

15.2.3. Различные типы цилиндрических функций

Модифицированные цилиндрические функции. Во многих задачах, решение которых приводит к функциям Бесселя, приходится сталкиваться с уравнением, отличающимся от рассмотренного ранее уравнения (15.2.10) наличием в нем еще одного параметра, который можно представить в виде k^2 . Такое уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (15.2.15)$$

непосредственно приводится к уравнению Бесселя, если в качестве независимой переменной взять $\xi = kx$:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dy}{d\xi} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2} \right) y = 0. \quad (15.2.16)$$

Решение уравнения (15.2.16) может быть представлено как

$$Z_\nu(\xi) = Z_\nu(kx) = c_1 J_\nu(kx) + c_2 Y_\nu(kx). \quad (15.2.17)$$

Если параметр k^2 отрицателен, например $k^2 = -p^2$, то уравнения (15.2.16) и (15.2.17) могут быть представлены так:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(p^2 + \frac{v^2}{x^2} \right) y = 0$$

или
$$\frac{d^2 y}{dv^2} + \frac{1}{v} \frac{dy}{dv} - \left(1 + \frac{v^2}{v^2} \right) y = 0, \quad (15.2.18)$$

где $v = kx = ipx$.

Очевидно, что, умножая независимую переменную v на $i = \sqrt{-1}$ и полагая $iv = \xi$, можно привести уравнение (15.2.18) к уравнению (15.2.16) с прежним решением $Z_v(\xi)$. Теперь, однако, $\xi = ikx$, и, следовательно, решением уравнения (15.2.18), которое можно назвать модифицированным уравнением Бесселя, будет

$$Z_v(\xi) = Z_v(ikx) = c_1 J_v(ikx) + c_2 Y_v(ikx) = c_1 J_v(iv) + c_2 Y_v(iv). \quad (15.2.19)$$

Решение (15.2.19) можно записать в виде

$$Z_v(\xi) = Z_v(iv) = a_1 I_v(v) + a_2 K_v(v), \quad (15.2.20)$$

где $I_v(v), K_v(v)$ — модифицированные функции Бесселя порядка v соответственно 1-го и 2-го рода; a_1, a_2 — постоянные, отличные от постоянных c_1, c_2 в уравнении (15.2.19). Связь между модифицированными и обычными функциями Бесселя выражается равенствами:

$$I_v(x) = i^{-v} J_v(ix); \quad (15.2.21)$$

$$K_v(x) = 0,5\pi i^{v+1} [J_v(ix) + iY_v(ix)] = 0,5[\pi i^{v+1} H_v^{(1)}(ix)]. \quad (15.2.22)$$

В равенстве (15.2.22) через H обозначена функция Ганкеля или, другими словами, функция Бесселя 3-го рода.

Модифицированные функции имеют следующие предельные значения:

При $x \rightarrow \infty$

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x};$$

при $x \rightarrow 0$

$$I_0(0) = 1, \quad K_0(0) = -\ln \frac{x}{2} - \gamma.$$

Производная $I_0(x)$:

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x).$$

Сопоставляя уравнения (15.2.19) и (15.2.20) с учетом уравнений (15.2.21) и (15.2.22), легко найти связь между соответствующими постоянными:

$$a_1 = c_1 i^v + c_2 i^{v+1}, \quad a_2 = \frac{2}{\pi} c_2 i^{2-v};$$

$$c_1 = a_1 i^{-v} + a_2 \frac{\pi}{2} i^{v+1}, \quad c_2 = a_2 \frac{\pi}{2} i^{2+v}.$$

Функции приведения для функций $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$:

$$I_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} I_\nu(z) + I_{\nu-1}(z); \quad K_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} K_\nu(z) + K_{\nu-1}(z);$$

$$\frac{d}{dz} I_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} I_\nu(z); \quad \frac{d}{dz} K_\nu(z) = -K_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} K_\nu(z);$$

$$\frac{d}{dz} z^\nu I_\nu(z) = z^\nu I_{\nu-1}(z); \quad \frac{d}{dz} z^\nu K_\nu(z) = -z^\nu K_{\nu-1}(z);$$

При целых $\nu = n$

$$I_{-n}(z) = I_n(z); \quad K_{-n}(z) = K_n(z).$$

Для действительных положительных значений x функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ принимают действительные положительные значения, причем $I_\nu(x)$ возрастает, $K_\nu(x)$ убывает (рис. 15.1 и 15.2).

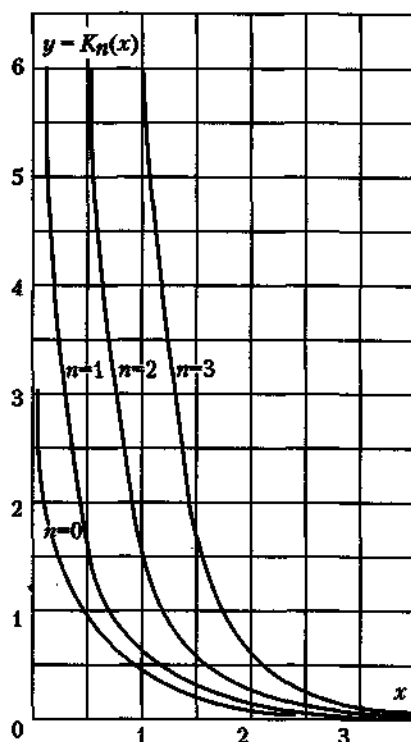
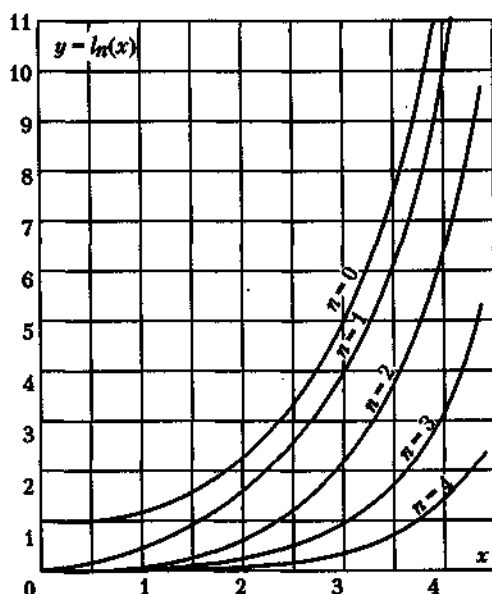


Рис.15.1. Модифицированные цилиндрические функции $y = K_\nu(x)$

Рис. 15.2. Модифицированные цилиндрические функции $y = I_n(x)$

При пользовании таблицами и при рассмотрении решений, представленных в опубликованной литературе, необходимо обращать внимание на вид используемых функций.

Цилиндрические функции 3-го рода (функции Ганкеля). Комплексы, действительной частью которых являются функции Бесселя 1-го рода, а мнимой — функции 2-го рода со знаком плюс:

$$H_v^{(1)}(x) = J_v(x) + iY_v(x),$$

или со знаком минус:

$$H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - iY_v(x),$$

носят название **функций Ганкеля (1-го и 2-го рода)** или **цилиндрических функций 3-го рода**. Порядок функций определяется параметром v .

Следует обратить внимание на то, что функции $H_v^{(1)}(x)$ и $H_v^{(2)}(x)$ являются сопряженными друг другу только при действительном аргументе. При комплексном аргументе $re^{i\theta}$ сопряженными являются функции $H_v^{(1)}(re^{i\theta})$ и $H_v^{(2)}(re^{-i\theta})$. Функции $H_v^{(p)}(re^{i\theta})$ и $H_v^{(p)}(re^{-i\theta})$ не являются сопряженными.

Очевидно, что общее решение уравнения Бесселя

$$Z_v(x) = c_1 J_v(x) + c_2 Y_v(x)$$

всегда может быть выражено через функции Ганкеля, умноженные соответственно на иные постоянные b_1 и b_2 :

$$Z_v(x) = b_1 H_v^{(1)}(x) + b_2 H_v^{(2)}(x),$$

причем
$$b_1 = \frac{c_1 - i c_2}{2}, \quad b_2 = \frac{c_1 + i c_2}{2}.$$

Удобство применения функций Ганкеля в значительной мере определяется тем, что это единственный вид цилиндрических функций, обращающихся в нуль при бесконечном комплексном аргументе: $H_v^{(1)}(x)$ — при положительном значении мнимой части аргумента и $H_v^{(2)}(x)$ — при ее отрицательном значении.

Из самого определения функций Ганкеля следует, что

$$\frac{d}{dx} H_0^{(1)}(x) = -H_1^{(1)}(x),$$

поскольку
$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} Y_0(x) = -Y_1(x).$$

При больших значениях x

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{e^{i(x-\pi/4)}}{\sqrt{\pi x/2}}, \quad H_0^{(2)}(x) = \frac{e^{-i(x-\pi/4)}}{\sqrt{\pi x/2}}.$$

При любом комплексном аргументе

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_v^{(1)}(re^{i\theta}) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} H_v^{(2)}(re^{-i\theta}) = 0, \quad \text{если } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

При чисто мнимом аргументе функции Ганкеля являются действительными.

При больших значениях z значения функций Ганкеля можно вычислить при помощи асимптотических формул:

$$H_v^{(1,2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm i\varphi_v(z)} [P_v(z) \pm i Q_v(z)],$$

где $|\arg z| \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$; $\varphi_v(z) = z - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}$;

$$P_v(z) = 1 - \frac{(4v^2 - 1)(4v^2 - 25)}{3!(8z)^2} + \dots;$$

$$Q_v(z) = \frac{4v^2 - 1}{8z} - \frac{(4v^2 - 1)(4v^2 - 9)(4v^2 - 25)}{3!(8z)^3} + \dots.$$

Наиболее полно цилиндрические функции рассмотрены в [15.2].

15.3. Обобщенные функции

15.3.1. Общие сведения

Введение. Представление о непрерывной среде или непрерывном поле, используемое при математической формулировке физических задач, игнорирует фактически дискретное строение материи. Вследствие этого, с точки зрения физика,

величины, фигурирующие в уравнениях математической физики, непосредственно не имеют физического смысла. Этот последний может быть приписан им лишь постольку, поскольку они позволяют охарактеризовать состояние среды или поле не в точке, но в некоторой, хотя бы и малой, области, достаточной, чтобы дискретное строение материи перестало играть роль.

Классическим примером этого является понятие температуры, имеющее смысл лишь по отношению к части физической среды, содержащей достаточно большое число молекул. Математическому понятию температуры в геометрической точке может быть приписан физический смысл лишь постольку, поскольку осреднение температуры, рассматриваемой как функция точки, по произвольным не слишком малым областям приводит к правильным значениям средней температуры в этих областях.

Таким образом, с точки зрения физики, более адекватным было бы описание физических явлений с помощью функций области, но не функций точки. Это указывает на известный разрыв между содержанием задач математической физики и их классической аналитической формулировкой, предусматривающей выполнение некоторых условий в каждой точке изучаемой области. Этот разрыв, в частности, проявляется в том, что многие задачи математической физики не имеют решений в точном аналитическом смысле, хотя их точные решения в смысле, подразумеваемом физикой, заведомо существуют.

В последние десятилетия получили широкое развитие новые направления анализа, которые, хотя и не дали каких-либо результатов, расширяющих классические методы решения задач математической физики, но позволили значительно усовершенствовать аналитическую формулировку задач и глубже исследовать проблему существования их решений. Ниже изложим, не проводя строгих доказательств, некоторые сведения об этих новых направлениях.

Обобщенные функции. Рассмотрим области одного, двух и трех измерений. Буквами x, ξ и т. д. обозначим точки этих областей. Эти же буквы, но с индексами, будут обозначать координаты соответствующих точек. Для определенности применим символику, относящуюся к трем измерениям, но все сказанное, с очевидными изменениями, будет применимо и при другом числе измерений (в частности, и для числа измерений большего трех).

Пусть $f(x)$ — функция точки x , описывающая некоторое физическое явление. В соответствии со сказанным ранее, физический смысл должен быть приписан не самой функции $f(x)$, но некоторой определяемой с ее помощью функции области. Это может быть среднее значение $f(x)$ в области (так, например, будет, если $f(x)$ — температура) или интеграл от $f(x)$ по области (если, например, $f(x)$ — плотность распределения массы) и т. д. В обоих указанных примерах переход от функции точки x к функции области осуществляется с помощью интегрирования. Более подробный анализ показывает, что такое положение является типичным в физике. Именно, функциям точки может быть приписан смысл лишь постольку, поскольку они определяют значение некоторого интеграла, имеющего физический смысл непосредственно.

Это обстоятельство наводит на мысль, что математический анализ может быть более адекватным физической реальности, если его строить как систему понятий, связывающих надлежащим образом выбранные интегралы, и вводить функции точек лишь на некоторых промежуточных стадиях построения. Очень важно, что эта программа может быть проведена даже более широко, охватывая и те случаи, когда функция области, естественно сопоставленная физическому явлению, не может быть представлена с помощью интеграла от функции точки.

В качестве вспомогательного средства построения рассматриваемой теории используют вещественные функции $\varphi(x)$ точки x , дифференцируемые по координатам точки x неограниченное число раз и финитные, т. е. отличные от нуля лишь в конечных областях. Эти функции будем называть *основными*, а их совокупность — *основным функциональным пространством* или просто *основным пространством*¹. Суммы основных функций, а также произведения основных функций на вещественное число, являются основными функциями. Пространство, элементы которого обладают этими свойствами, называют линейным. Таким образом, основное пространство является линейным.

Говорят, что последовательность $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_v(x), \dots$ основных функций сходится в основном пространстве, если все функции $\varphi_k(x)$ обращаются в нуль вне одной и той же конечной области, а разности $\varphi_{v+k} - \varphi_v$ ($k > v$) вместе с их производными любого порядка, стремятся к нулю с ростом v равномерно относительно выбора точки x .

Будем считать, что функция $f(x)$, описывающая некоторое физическое явление, локально интегрируема². Сопоставим ей совокупность интегралов вида

$$\iiint f(x)\varphi(x)dV, \quad (15.3.1)$$

где $\varphi(x)$ — основные функции. Интегрирование можно считать распространенным по всему пространству³, фактически, оно будет осуществляться по конечной облас-

¹ Под пространством (точнее, топологическим пространством) понимают такое множество, что пересечение любого конечного числа, а также всякое объединение его подмножеств, в свою очередь, являются его подмножествами. (Объединением подмножеств называют множество элементов исходного множества, входящих хотя бы в одно из объединяемых подмножеств. Пересечением данных подмножеств называют множество элементов исходного множества, входящих во все данные подмножества.) Читателя не затруднит проверить, что совокупность основных функций является пространством. В зависимости от выбора элементов пространства и отношений между ними различают те или иные пространства, например линейное, функциональное и т. п. Множество основных функций является функциональным пространством, так как его элементами являются функции, причем отношения между ними определяются обычными операциями анализа.

² Если существует интеграл от абсолютной величины функции по любой конечной области, говорят, что эта функция локально интегрируема.

³ Здесь и всюду ниже в понятие пространства (без прилагательного «основное») вкладывается тот же смысл, что и на протяжении всей книги, т. е. имеется в виду «геометрическое пространство», в котором протекают физические явления.

ти, в которой соответствующая основная функция $\varphi(x)$ не равна тождественно нулю.

Интеграл (15.3.1) при данной функции $\varphi(x)$ представляет число. Выбрав другую основную функцию $\varphi(x)$, мы получим, вообще говоря, другое число. Правило, согласно которому каждой функции из данного функционального пространства сопоставляется некоторое число, называют **функционалом**. Таким образом, интеграл (15.3.1) представляет функционал, определенный в основном пространстве для данной локально интегрируемой функции $f(x)$. Употребляют сокращенное обозначение:

$$(f, \varphi) \equiv \iiint f(x) \varphi(x) dV. \quad (15.3.2)$$

Можно показать, что совокупность значений, которые функционал (f, φ) принимает в основном пространстве (т. е. при всевозможном выборе функций $\varphi(x)$), однозначно определяет функцию $f(x)$ во всех точках, в которых она непрерывна. В частности, двум различным непрерывным функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответствуют функционалы (f_1, x) и (f_2, x) , принимающие различные значения хотя бы для некоторых основных функций. Можно далее показать, что средние значения локально интегрируемой функции $f(x)$ в любой конечной области однозначно определяются функционалом (f, x) . Таким образом, задание функционала определяет функцию точки с той степенью точности, какая нас интересует и, в этом смысле, эквивалентно заданию самой функции точки.

Функционал (f, φ) , определенный выражением (15.3.2), линеен, т. е.

$$(f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2), \quad (15.3.3)$$

где α_1, α_2 — произвольные постоянные, и непрерывен, т. е. каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно найти такое число $v_0 > 0$, что

$$|(f, \varphi_v) - (f, \varphi_{v+k})| < \varepsilon, \text{ если } v > v_0, k > 0, \quad (15.3.4)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_v, \dots$ — последовательность основных функций, сходящаяся в основном пространстве. Важными свойствами обобщенных функций являются свойства линейности и непрерывности.

Если указано правило f , сопоставляющее каждой основной функции $\varphi(x)$ некоторое число (f, φ) так, что выполняются соотношения (15.3.3) и (15.3.4), то говорят, что на основном пространстве задан линейный непрерывный функционал или обобщенная функция.

Обобщенную функцию называют регулярной, если ее значения могут быть определены с помощью локально интегрируемой функции точки по правилу, определяемому выражением (15.3.2). Однако по этому правилу не могут быть получены все обобщенные функции. Существуют обобщенные функции — их называют **сингулярными**, — которым никакой функции точки вообще не может быть сопоставлено. Тем не менее эти функции необходимы для описания некоторых физических явлений.

Для обозначения обобщенных функций используются символы

$$f(x), (f, \varphi) \text{ или } \iiint f(x) \varphi(x) dV,$$

где f , вообще говоря, — символ правила, сопоставляющего каждой основной функции $\varphi(x)$ некоторое число. Если обобщенная функция сингулярна, то символы

$$(f, \varphi) \text{ и } \iiint f(x) \varphi(x) dV$$

понимаются только как это число (но не как интегралы, что было бы лишено смысла). Применение обозначения $f(x)$, формально совпадающего с обозначением функции точки, связано с тем, что, по сказанному выше, задание регулярной обобщенной функции, соответствующей некоторой локально интегрируемой функции точки, эквивалентно заданию этой последней. В этом смысле часто говорят, что регулярная обобщенная функция совпадает с некоторой функцией точки. Поэтому естественно расширение смысла символа $f(x)$, причем из текста должно быть ясно, идет ли речь об обычной функции или об обобщенной. Это обозначение удобно также тем, что включает указание на аргумент x , от которого зависят основные функции.

Нашей ближайшей целью будет установление правил действий с обобщенными функциями. Важнейший принцип, на который мы будем при этом опираться, — требование, чтобы в частном случае, когда обобщенные функции регулярны, правила действий с ними были бы следствием правил классического анализа и определения (15.3.2) регулярной обобщенной функции. Тем самым обеспечивается согласованность теории обобщенных функций с классическим анализом.

15.3.2. Дельта-функция Дирака

Важным примером сингулярной обобщенной функции является дельта-функция, введенная Дираком (задолго до появления самого понятия обобщенной функции). В современных обозначениях дельта-функция $\delta(x - \xi)$ может быть определена правилом

$$(\delta(x - \xi), \varphi(x)) = \varphi(\xi), \quad (15.3.5)$$

где ξ — произвольная фиксированная точка. Иначе говоря, каждой основной функции $\varphi(x)$ ставят в соответствие ее значение $\varphi(\xi)$ в точке ξ .

Носителем дельта-функции $\delta(x - \xi)$, очевидно, является одна точка ξ . Вследствие этого значение функционала $(\delta(x - \xi), \varphi(x))$ одинаково для всех основных функций, имеющих одинаковые значения в точке $x = \xi$.

Перепишем соотношение (15.3.5) в виде

$$\iiint \delta(x - \xi) \varphi(x) dV = \varphi(\xi)$$

и будем формально рассматривать его как интеграл. В силу замечания о носителе дельта-функции, части этого интеграла, полученные интегрированием по

областям, не содержащим точки ξ , должны быть равны нулю. Вследствие этого, при всех основных функциях, равных 1 в точке $x = \xi$, формально можем записать:

$$\iiint_V \delta(x - \xi) dV = \begin{cases} 1, & \text{когда } \xi \text{ внутри } V, \\ 0, & \text{когда } \xi \text{ вне } V. \end{cases} \quad (15.3.6)$$

Соотношение (15.3.6) кладется в основу определения дельта-функции в физике. Такое определение, однако, недостаточно строго, так как в классическом смысле, функции удовлетворяющей условию (15.3.6), не существует.

Дадим с помощью дельта-функции определение точечного источника. Если источники распределены непрерывно с плотностью ρ , то количество субстанции (например, жидкости), образовавшееся в области V , равно интегралу

$$\iiint_V \rho dV.$$

Если же источник точечный, то это количество равно либо производительности источника, когда последний расположен в области V , либо нулю, когда источник расположен вне области V . Таким образом, мы имеем дело с ситуацией того же характера, как в формуле (15.3.6). Поэтому очевидно, что точечный источник надо отождествить с дельта-функцией, умноженной на постоянную, равную производительности источника.

Подробнее о дельта-функции Дирака (ее свойствах и действиях над нею) см. в [15.3].

Библиографический список к главе 15

- 15.1. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. — М.: ИИЛ, 1952. — 476 с.
- 15.2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1, 2. — М.: ИИЛ, 1949.
- 15.3. Краснопевцев Е. А. Математические методы физики. Избранные вопросы: Учеб. пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — 124 с.

Приложения

Приложение 1

Наиболее употребительные системы координат

$h_{q_1}, h_{q_2}, h_{q_3}$ — коэффициенты Ламе

№ п/п	Системы ортогональных криволинейных координат	h_{q_1}	h_{q_2}	h_{q_3}
1	Сферические — $\{r, \theta, \varphi\}$	1	r	$r \sin \theta$
2	Вытянутые сфероидальные — $\{\xi, \eta, \varphi\}$	$a \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}$	$a \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}$	$a \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}$
3	Сжатые сфероидальные — $\{\xi, \eta, \varphi\}$	$a \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 + 1}}$	$a \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \eta^2}}$	$a \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}$
4	Параболические — $\{\mu, \nu, \varphi\}$	$\mu^2 + \nu^2$	$\mu^2 + \nu^2$	$\mu^2 \nu^2$
5	Прямоугольные — $\{x, y, z\}$	1	1	1
6	Круговые цилиндрические — $\{r, \varphi, z\}$	1	r	1

Приложение 2

Элементы векторной алгебры

$\vec{e}_{q_1}, \vec{e}_{q_2}, \vec{e}_{q_3}$ — единичные орты

№ п/п	Системы ортогональных криволинейных координат	$\vec{e}_{q_1}$	$\vec{e}_{q_2}$	$\vec{e}_{q_3}$
1	Сферические — $\{r, \theta, \varphi\}$	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_\theta$	$\vec{e}_\varphi$
2	Вытянутые сфероидальные — $\{\xi, \eta, \varphi\}$	$\vec{e}_\xi$	$\vec{e}_\eta$	$\vec{e}_\varphi$
3	Сжатые сфероидальные — $\{\xi, \eta, \varphi\}$	$\vec{e}_\xi$	$\vec{e}_\eta$	$\vec{e}_\varphi$

№ п/п	Системы ортогональных криволинейных координат	$\vec{e}_{q_1}$	$\vec{e}_{q_2}$	$\vec{e}_{q_3}$
4	Параболические — $\{\mu, \nu, \phi\}$	$\vec{e}_\mu$	$\vec{e}_\nu$	$\vec{e}_\phi$
5	Прямоугольные — $\{x, y, z\}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
6	Круговые цилиндрические — $\{r, \phi, z\}$	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_\phi$	$\vec{e}_z$

Используемые ниже произведения векторов инвариантны по отношению ко всем ортогональным криволинейным системам координат $\{q_1, q_2, q_3\}$, удовлетворяющих условиям

$$\vec{e}_{q_i} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\vec{e}_{q_2}}{\vec{e}_{q_3}} \right) = 0.$$

Такому условию удовлетворяют декартовые прямоугольные координаты $\{x, y, z\}$; цилиндрические круговые координаты $\{r, \phi, z\}$; координаты эллиптического цилиндра $\{\nu, \mu, z\}$; координаты параболического цилиндра $\{p, q, z\}$; сферические координаты $\{r, \theta, \phi\}$ и конические координаты $\{r, \mu, \nu\}$.

Скалярные произведения векторов

Произведения единичных ортов

$$\vec{e}_{q_1} \vec{e}_{q_2} = \vec{e}_{q_2} \vec{e}_{q_1} = \vec{e}_{q_3} \vec{e}_{q_1} = 0, \quad \vec{e}_{q_1} \vec{e}_{q_1} = \vec{e}_{q_2} \vec{e}_{q_2} = \vec{e}_{q_3} \vec{e}_{q_3} = 1.$$

Произведения векторов

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_{q_i} B_{q_i}, \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C},$$

$$\vec{A} \cdot \vec{e}_{q_i} = A_{q_i}, \quad i \in [1, 3].$$

Векторные произведения векторов

Произведения единичных ортов

$$\vec{e}_{q_1} \times \vec{e}_{q_2} = \vec{e}_{q_3}, \quad \vec{e}_{q_2} \times \vec{e}_{q_3} = \vec{e}_{q_1}, \quad \vec{e}_{q_3} \times \vec{e}_{q_1} = \vec{e}_{q_2}, \quad \vec{e}_{q_1} \times \vec{e}_{q_3} = -\vec{e}_{q_2},$$

$$\vec{e}_{q_2} \times \vec{e}_{q_1} = -\vec{e}_{q_3}, \quad \vec{e}_{q_3} \times \vec{e}_{q_2} = -\vec{e}_{q_1}, \quad \vec{e}_{q_1} \times \vec{e}_{q_2} = \vec{e}_{q_3} \times \vec{e}_{q_3} = 0.$$

Произведения векторов

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}, \quad m(\vec{A} \times \vec{B}) = m\vec{A} \times \vec{B}, \quad \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C},$$

$$\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}(\vec{C} \times \vec{A}),$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\vec{B})\vec{C},$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})(\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{A}[\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})],$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = [(\vec{A} \times \vec{B})\vec{D}]\vec{C} - [(\vec{A} \times \vec{B})\vec{C}]\vec{D}.$$

Приложение 3

Дифференциальные операторы векторного анализа

Оператор Гамильтона (набла) ∇ выражается в ортогональной криволинейной системе координат $\{q_1, q_2, q_3\}$ формулой

$$\nabla = \vec{e}_{q_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3} \frac{\partial}{\partial q_3}.$$

Оператор Лапласа (лапласиан) $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta$ выражается в ортогональной криволинейной системе координат $\{q_1, q_2, q_3\}$ формулой

$$\Delta = \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2} h_{q_3}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_{q_2} h_{q_3}}{h_{q_1}} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_{q_3} h_{q_1}}{h_{q_2}} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_{q_1} h_{q_2}}{h_{q_3}} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right].$$

Заметим, что

$$\nabla^2(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla^2\Phi + \beta\nabla^2\Psi \quad (\text{линейность}),$$

$$\nabla^2(\Phi\Psi) = \Psi\nabla^2\Phi + 2(\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Psi) + \Phi\nabla^2\Psi.$$

Операции второго порядка. Отметим следующие правила повторного применения оператора ∇ :

$$\text{grad div } \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \nabla^2 \vec{A} + \nabla \times (\nabla \times \vec{A}),$$

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + (\vec{A} \text{ grad}) \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A} + (\vec{B} \text{ grad}) \vec{A},$$

$$\text{grad}(\phi\psi) = \phi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \phi,$$

$$\text{div}(\phi \vec{A}) = \phi \text{ rot } \vec{A} + (\text{grad } \phi) \times \vec{A},$$

$$\text{div}(\phi \vec{A}) = \vec{A} \text{ grad } \phi + \phi \text{ div } \vec{A},$$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \text{ rot } \vec{B} - \vec{B} \text{ rot } \vec{A},$$

$$\text{div}[\vec{A} \vec{B}] = \vec{B} \text{ rot } \vec{A} - \vec{A} \text{ rot } \vec{B},$$

$$\text{div grad } \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \Delta \phi,$$

$$\text{div rot } \vec{A} = 0,$$

$$\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \text{ grad}) \vec{A} - (\vec{A} \text{ grad}) \vec{B} + \vec{A} \text{ div } \vec{B} - \vec{B} \text{ div } \vec{A},$$

$$\text{rot grad } \phi = 0,$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A},$$

$$\text{rot}(\phi \vec{A}) = \phi \text{ rot } \vec{A} + (\text{grad } \phi) \times \vec{A}.$$

Приложение 4

Дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах $\{q_1, q_2, q_3\}$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_{q_1} \operatorname{rot}_{q_1} \vec{A} + \vec{e}_{q_2} \operatorname{rot}_{q_2} \vec{A} + \vec{e}_{q_3} \operatorname{rot}_{q_3} \vec{A},$$

$$\operatorname{rot}_{q_1} \vec{A} = \frac{1}{h_{q_2} h_{q_3}} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_{q_3} A_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_{q_2} A_{q_2}) \right],$$

$$\operatorname{rot}_{q_2} \vec{A} = \frac{1}{h_{q_3} h_{q_1}} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_{q_1} A_{q_1}) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_{q_3} A_{q_3}) \right],$$

$$\operatorname{rot}_{q_3} \vec{A} = \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_{q_2} A_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_{q_1} A_{q_1}) \right].$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2} h_{q_3}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_{q_2} h_{q_3} A_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_{q_3} h_{q_1} A_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_{q_1} h_{q_2} A_{q_3}) \right].$$

$$\operatorname{grad} \rho = \vec{e}_{q_1} \frac{\partial \rho}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{\partial \rho}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3} \frac{\partial \rho}{\partial q_3} = \vec{e}_{q_1} \operatorname{grad}_{q_1} \rho + \vec{e}_{q_2} \operatorname{grad}_{q_2} \rho + \vec{e}_{q_3} \operatorname{grad}_{q_3} \rho,$$

$$\operatorname{grad}_{q_i} \rho = \frac{1}{h_{q_i}} \frac{\partial \rho}{\partial q_i}, \quad i \in [1, 2, 3].$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2} h_{q_3}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_{q_2} h_{q_3}}{h_{q_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_{q_3} h_{q_1}}{h_{q_2}} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_{q_1} h_{q_2}}{h_{q_3}} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right].$$

Приложение 5

Принятые в литературе единицы измерения

Наименование единицы	Обозначение единицы			Величина, измеряемая единицей
	русское		междуна- родное	
	старое	новое		
Ампер	а	А	A	Электрический ток
Вар	вар	вар	var	Реактивная мощность
Ватт	вт	Вт	W	Мощность

Наименование единицы	Обозначение единицы			Величина, измеряемая единицей
	русское		междуна- родное	
	старое	новое		
Вебер	вб	Вб	Wb	Магнитный поток
Вольт	в	В	V	Электрическое напряжение
Гаусс	гс	Гс	Gs	Магнитная индукция
Генри	гн	Гн	H	Индуктивность
Герц	гц	Гц	Hz	Частота
Гильберт	гб	Гб	Gb	Магнитодвижущая сила
Градус Цельсия*	°C	°C	°C	Температура
Грамм	г	Г	g	Масса
Грамм-сила*	гс	ГС	gf	Сила
Джоуль	дж	Дж	J	Работа
Дина	дин	дин	dyn	Сила
Калория*	кал	кал	cal	Количество теплоты
Кандела	(св)	кд	cd	Сила света
Кельвин	(°K)	К	K	Температура
Кулон	к	Кл	C	Количество электричества
Кюри*	—	Ки	Ci	Активность нуклида
Люкс	лк	лк	lx	Освещенность
Люмен	лм	лм	lm	Световой поток
Максвелл	мкс	Мк	Mx	Магнитный поток
Метр	м	м	m	Длина
Минута*	мин	мин	min	Время
Ньютон	н	Н	N	Сила
Ом	ом	Ом	Q	Электрическое сопротивление
Паскаль	—	Па	Pa	Давление
Пуаз	пз	П	P	Динамическая вязкость
Рад*	рад	рад	rad	Поглощенная доза излучения
Радан	рад	рад	rad	Плоский угол
Рентген*	р	Р	R	Экспозиционная доза излучения

Наименование единицы	Обозначение единицы			Величина, измеряемая единицей
	русское		междуна- родное	
	старое	новое		
Секунда	сек	с	s	Время
Сименс	сим	См	S	Электрическая проводимость
Стерadian	стер	ср	sr	Телесный угол
Стокс	ст	Ст	St	Кинематическая вязкость
Тесла	тл	Т	T	Магнитная индукция
Фарада	ф	Ф	F	Электрическая емкость
Час*	ч	ч	h	Время
Эрг	эрг	эрг	erg	Работа
Эрстед	э	Э	Oe	Напряженность магнитного поля

Примечание. Приведены единицы (только с простыми наименованиями) международной системы (полужирный шрифт), системы СГС и наиболее распространенные внесистемные единицы, допускаемые к применению в РФ (отмечены звездочкой).

Приложение 6

Сводка применений дифференциального оператора набла (∇)

Вид операции	Обозначение	Применяется к величине	Полученная величина
Градиент	$\nabla \phi$	Скалярной	Векторная
Дивергенция		Векторной	Скалярная
Ротор		Векторной	Векторная
Лапласиан (скалярный), Дивергенция градиента	$\nabla^2 \phi$	Скалярной	Скалярная
Лапласиан (векторный)	$\nabla^2 \vec{A}$	Векторной	Векторная
Градиент дивергенции	$\nabla(\nabla \vec{A})$	Векторной	Векторная
Ротор ротора	$[\nabla[\nabla, \vec{A}]]$	Векторной	Векторная
Ротор градиента	$[\nabla(\nabla, \phi)]$	Скалярной	Нуль
Дивергенция ротора	$\nabla[\nabla, \vec{A}]$	Векторной	Нуль

Приложение 7

Уравнения Максвелла в обобщенных ортогональных координатах $\{q_1, q_2, q_3\}$

Уравнения Максвелла в векторной форме удобны тем, что они характеризуют общие свойства электромагнитных полей безотносительно к системе координат. При решении инженерных задач всегда приходится прибегать к системе координат, соответствующей форме расчетной области. Чаще всего пользуются системами координат, в которых три семейства координатных поверхностей ортогональны друг другу.

Уравнения Максвелла в обобщенных криволинейных ортогональных координатах $\{q_1, q_2, q_3\}$ могут быть выражены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_{q_1} h_{q_3}} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_{q_3} H_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_{q_2} H_{q_2}) \right] &= \delta_{q_1} + \frac{\partial D_{q_1}}{\partial t}, \\ \frac{1}{h_{q_3} h_{q_1}} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_{q_1} H_{q_1}) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_{q_3} H_{q_3}) \right] &= \delta_{q_2} + \frac{\partial D_{q_2}}{\partial t}, \\ \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_{q_2} H_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_{q_1} H_{q_1}) \right] &= \delta_{q_3} + \frac{\partial D_{q_3}}{\partial t}, \\ \frac{1}{h_{q_1} h_{q_3}} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_{q_3} E_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_{q_2} E_{q_2}) \right] &= -\frac{\partial B_{q_1}}{\partial t}, \\ \frac{1}{h_{q_3} h_{q_1}} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_{q_1} E_{q_1}) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_{q_3} E_{q_3}) \right] &= -\frac{\partial B_{q_2}}{\partial t}, \\ \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_{q_2} E_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_{q_1} E_{q_1}) \right] &= -\frac{\partial B_{q_3}}{\partial t}, \\ \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2} h_{q_3}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_{q_2} h_{q_3} B_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_{q_3} h_{q_1} B_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_{q_1} h_{q_2} B_{q_3}) \right] &= 0, \\ \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2} h_{q_3}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_{q_2} h_{q_3} D_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_{q_3} h_{q_1} D_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_{q_1} h_{q_2} D_{q_3}) \right] &= \rho, \\ D_{q_1} &= \epsilon E_{q_1}, \quad B_{q_1} = \mu H_{q_1}, \quad \delta_{q_1} = \gamma (E_{q_1} + E_{e1}), \\ D_{q_2} &= \epsilon E_{q_2}, \quad B_{q_2} = \mu H_{q_2}, \quad \delta_{q_2} = \gamma (E_{q_2} + E_{e2}), \\ D_{q_3} &= \epsilon E_{q_3}, \quad B_{q_3} = \mu H_{q_3}, \quad \delta_{q_3} = \gamma (E_{q_3} + E_{e3}), \\ w &= 0,5\epsilon(E_{q_1}^2 + E_{q_2}^2 + E_{q_3}^2) + 0,5\mu(H_{q_1}^2 + H_{q_2}^2 + H_{q_3}^2). \end{aligned}$$

Список принятых обозначений и сокращений

Принятые обозначения

R^n — n -мерное евклидово пространство.

Область — открытое связное множество.

∂V — граница ограниченного множества V .

q_1, q_2, q_3 — система ортогональных криволинейных координат.

$h_{q_1}, h_{q_2}, h_{q_3}$ — коэффициенты Ламе.

$\vec{e}_{q_1}, \vec{e}_{q_2}, \vec{e}_{q_3}$ — единичные орты.

$D(A)$ — область определения оператора A .

$R(A)$ — область значений оператора A .

Собственное значение — числовой параметр, являющийся вместе с собственной функцией φ решением уравнения $A\varphi = \lambda\varphi$.

Оператор — L .

Оператор Гамильтона: $L \equiv \vec{\nabla} = \sum_{i=1}^n \vec{e}_{q_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$.

Оператор Лапласа: $L \equiv \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}$.

Оператор Даламбера: $L \equiv \Pi_a = \frac{\partial}{\partial t^2} - a^2 \Delta$.

Принятые сокращения

АД — асинхронный двигатель

ВОЗ — Всемирная организация здравоохранения

ИНЧ — инфранизкая частота

КНЧ — крайне низкая частота

ЛЭП — линия электропередачи

МГД — магнитогидродинамический

МП — магнитное поле

МСП — магнитостатическое поле

ПДК — предельно допустимая концентрация

ПДУ – предельно допустимый уровень
ППЭ – плотность потока энергии
СТ – синхронный генератор
СВЧ – сверхвысокая частота
СЗЗ – санитарно-защитная зона
СНЧ – сверхнизкая частота
УВЧ – ультравысокая частота
УКВ – ультракороткая волна
ЭДС – электродвижущая сила
ЭВМ – электронно-вычислительная машина
ЭЛТ – электронно-лучевая трубка
ЭМ – электрическая машина
ЭМИ – электромагнитный импульс
ЭМП – электромагнитное поле
ЭМС – электромагнитная совместимость
ЭМО – электромагнитная обстановка
ЭМЭ – электромагнитная экология
ЭО – электрооборудование
ЭП – электрическое поле
ЭСП – электростатическое поле
ЭЭС – электроэнергетическая система.

Общий список литературы

1. Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики / под ред. Г. И. Марчука. — М.: ИВМ РАН, 2001. — 399 с.
2. Аполлонский С. М. Расчет электромагнитных экранирующих оболочек. — Л.: Энергоиздат, 1982. — 144 с.
3. Аполлонский С. М. Электромагнитное поле в неоднородных средах: Учеб. пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. — СПб.: Изд-во СЗТУ, 2006. — 538 с.
4. Аполлонский С. М., Абдыманапов С. А., Горский А. Н. Дифференциальные уравнения математической физики в инженерных задачах: Учеб. пособие. — Астана: ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, 2007. — 350 с.
5. Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. — Минск: Университетское, 1988. — 246 с.
6. Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. — СПб.: Безопасность, 1999. — 415 с.
7. Бабич В. М., Изотова О. В. О решении в обобщенных функциях задач математической физики. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. — 40 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М., 1974. — 295 с.
9. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике: Для инженеров и учащихся втузов — 13-е изд., исправл. — М.: Наука, 1986. — 544 с.
10. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций. — М., 1949, т. 1. — 798 с.
11. Векуа Н. П. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и приложение в механике. — М.: Наука, 1991. — 255 с.
12. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. Изд. 6-е, доп. и испр. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 870 с.
13. Гобсон Е. В. Теория сферических и сферондальных функций. — М.: ИЛ, 1952. — 455 с.
14. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля. — М.: Энергия, 1986. — 488 с.
15. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, ГРФМЛ, 1962. — 1097 с.
16. Григорьева Н. С. Методы математической физики. — Л.: Изд-во СЗПИ, 1990. — 53 с.
17. Дестярев В. Г. и др. Математические основы теории физических полей. — Л.: ЛИТМО, 1989. — 91 с.

18. *Ерофеев В. Т.* Теоремы сложения. — Минск: Наука и техника, 1989. — 256 с.
19. *Ерофеев В. Т., Козловская И. С.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: Курс лекций. Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 248 с.
20. *Ерунова И. Б.* Высшая математика. Методы математической физики: учеб. пособие. — СПб.: Изд-во СЗПИ, 2000. — 103 с.
21. *Захаров Е. В. и др.* Методическое пособие по курсу «Методы математической физики». — М.: ВМК МГУ, 2000. — 149 с.
22. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. — Минск: Наука и техника, 1968. — 583 с.
23. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1971. — 576 с.
24. *Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С.* Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 1977. — 447 с.
25. *Камеч А. И.* Практическое решение уравнений математической физики. — М.: МГУ, 1993. — 154 с.
26. *Коптенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. — М.: ИИЛ, 1963. — 406 с.
27. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 768 с.
28. *Краснопецев Е. А.* Математические методы физики. Избранные вопросы: Учеб. пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — 124 с.
29. *Лабунцов Д. А.* Физические основы энергетики. — М.: МЭИ, 2000. — 386 с.
30. *Лаврентьев Г. В.* Уравнения математической физики. — Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 1996. — 91 с.
31. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1973. — 736 с.
32. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. — М.: Гостехтеоретиздат, 1953. — 380 с.
33. *Матханов П. Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. Учебн. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1972. — 336 с.
34. *Морс Ф. М., Фейсбах Г.* Методы теоретической физики. — М.: ИИЛ. Т. 1, 1958. — 930 с. Т. 2, 1960. — 886 с.
35. *Нейман Л. Р., Калантаров П. Л.* Теоретические основы электротехники. Ч. 2. — М., Л.: Энергоиздат, 1959. — 440 с.
36. *Первадчук В. П.* Уравнения математической физики: методы решения задач. — Пермь, 2001. — 144 с.
37. *Потапенко А. А., Шефтель М. Б.* Методы математической физики: Учеб. пособие. — Л.: Изд-во СЗПИ, 1979. — 80 с.
38. *Саяхов Ф. Л., Закирьянов Ф. К., Галимбеков А. Д.* Термодинамика сплошных сред в электромагнитном поле: Учебн. пособие. — Уфа: Башкирский университет, 1996. — 89 с.
39. *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Лекции по математической физике. 2-е изд., испр. и доп. — М.: Изд. МГУ; Наука, 2004. — 414 с.

40. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1992. — 431 с.
41. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовича, И. Стигана. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1979. — 830 с.
42. *Страттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. — М.: Гостехиздат, 1948. — 587 с.
43. *Терпугов А. Ф., Терпугова Н. С.* Математические модели физики. — Томск, 1990. — 164 с.
44. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: ИИЛ. Т.1, 1958. — 930 с.
45. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. — Л.: Наука, 1977. — 220 с.
46. *Фильчаков П. Ф.* Приближенные методы конформных отображений. — Киев: Наук. думка, 1964. — 531 с.
47. *Шестопалов В. П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. — Киев: Наук. думка, 1983. — 251 с.
48. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. — М.: МИР, 1964. — 773 с.
49. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1977. — 342 с.

Оглавление

Предисловие	5
Введение.....	6

Часть I. Методы математической физики и их использование при решении технических задач..... 7

Глава 1. Виды полей и их математическое описание	9
1.1. Виды полей и их характеристики	9
1.2. Скалярные поля.....	11
1.3. Векторные поля.....	13
1.4. Криволинейные координаты.....	15
1.5. Основные операторы, используемые при анализе поля.....	19
1.6. Основные теоремы, используемые при преобразовании векторов.....	25
1.6.1. Теорема Остроградского–Гаусса	25
1.6.2. Теорема Стокса	25
1.6.3. Теорема Грина	26
1.7. Типовые дифференциальные уравнения, описывающие поля.....	27
1.7.1. Дифференциальные уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными	27
1.7.2. Дифференциальные уравнения второго порядка со многими независимыми переменными	34
1.7.3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.....	36
Контрольные вопросы к главе 1	37
Библиографический список к главе 1	37

Глава 2. Краевые задачи математической физики.....	42
2.1. Постановка краевых задач математической физики.....	42
2.1.1. Основные понятия	42
2.1.2. Характеристики квазилинейных уравнений второго порядка	43
2.1.3. Классификация квазилинейных уравнений второго порядка.....	50
2.1.4. Граничные (краевые) и начальные условия.....	51
2.1.5. Единственность решения краевых задач	55
2.2. Виды граничных условий.....	56
2.2.1. Задачи с начальными условиями	56

2.2.2. Начально-краевые задачи.....	56
2.2.3. Краевые задачи.....	57
2.3. О корректности постановки задач математической физики.....	57
2.4. Методы решения дифференциальных уравнений.....	59
2.4.1. Общие сведения.....	59
2.4.2. Метод разделения переменных.....	61
2.5. Теоремы сложения.....	63
2.6. Специальные функции, используемые при решении дифференциальных уравнений математической физики.....	65
Контрольные вопросы к главе 2.....	65
Библиографический список к главе 2.....	65
Глава 3. Дифференциальные уравнения гиперболического типа	68
3.1. Простейшие задачи, моделируемые уравнениями гиперболического типа.....	68
3.1.1. Уравнения малых колебаний струны.....	68
3.1.2. Электрические колебания в проводах.....	71
3.1.3. Уравнения гидродинамики.....	72
3.1.4. Уравнения акустики.....	74
3.2. Граничные и начальные условия.....	76
3.3. Редукция общей задачи.....	81
3.4. Постановка краевых задач для случая многих переменных.....	82
3.5. О единственности решения краевых задач, описываемых гиперболическими уравнениями.....	83
3.6. Метод разделения переменных при решении задач гиперболического типа.....	86
Контрольные вопросы к главе 3.....	90
Библиографический список к главе 3.....	91
Глава 4. Дифференциальные уравнения параболического типа	94
4.1. Простейшие задачи по теплопроводности, приводящие к уравнению параболического типа.....	94
4.1.1. Линейная задача о распространении тепла.....	94
4.1.2. Уравнение диффузии.....	98
4.2. Граничные и начальные условия.....	99
4.3. Принцип максимального значения.....	109
4.4. Единственность решения краевых задач, описываемых параболическими уравнениями.....	107
4.5. Метод разделения переменных.....	108
4.6. Примеры решения задач, сводящихся к параболическим.....	110
4.6.1. Теплопроводность в ограниченном стержне.....	110
Контрольные вопросы к главе 4.....	111
Библиографический список к главе 4.....	112

Глава 5. Дифференциальные уравнения эллиптического типа	114
5.1. Общий вид уравнений эллиптического типа.....	114
5.2. Основные граничные задачи.....	115
5.3. Простейшие задачи, моделируемые уравнениями Лапласа	117
5.3.1. Уравнение Лапласа.....	117
5.3.2. Стационарное тепловое поле	117
5.3.3. Потенциальное течение несжимаемой жидкости.....	119
5.3.4. Потенциал стационарного и электростатического поля.....	120
5.3.5. Потенциал магнитостатического поля.....	121
5.4. Решение задач, описываемых уравнениями Лапласа	122
5.4.1. Методы решений уравнения Лапласа.....	122
5.4.2. Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных	123
5.4.3. Единственность решения граничных задач, описываемых уравнениями Лапласа	127
5.5. Простейшие задачи, моделируемые уравнениями Гельмгольца.....	131
5.5.1. Задачи, приводящие к уравнению Гельмгольца	131
5.5.2. Связь уравнения Гельмгольца с уравнениями гиперболического и параболического типов	134
5.5.3. Постановка внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца	136
5.5.4. Постановка внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца	137
5.5.5. Методы решения уравнений Гельмгольца	140
Контрольные вопросы к главе 5.....	142
Библиографический список к главе 5.....	142

Часть II. Методы математической физики в задачах электротехники..... 145

Глава 6. Электрические цепи с распределенными параметрами.....	146
6.1. Установившиеся процессы в цепях с распределенными параметрами.....	146
6.1.1. Уравнения однородной линии.....	146
6.1.2. Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме	148
6.2. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами	151
6.2.1. Общее решение уравнений однородной неискажающей линии.....	151
6.2.2. Волны в неискажающей линии.....	153
6.2.3. О происхождении и характере волн в линиях	155
6.2.4. Преломление и отражение волн в месте сопряжения двух однородных линий	156
6.2.5. Отражение волн от конца линии.....	159

6.2.6. Процесс включения однородной линии.....	163
6.2.7. Прохождение волн при наличии реактивного сопротивления в месте сопряжения однородных линий.....	165
6.2.8. Прохождение волн при наличии активного сопротивления в месте однородных линий.....	168
Контрольные вопросы к главе 6.....	170
Библиографический список к главе 6.....	171
Глава 7. Математическая модель электромагнитного поля.....	174
7.1. Векторы электромагнитного поля.....	174
7.2. Аналитическая связь между электрическими и магнитными явлениями.....	175
7.2.1. Законы полного тока и Фарадея.....	175
7.2.2. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.....	176
7.2.3. Теорема Гаусса и постулат Максвелла в дифференциальной форме.....	179
7.3. Принцип непрерывности магнитного потока и тока.....	182
7.4. Теоремы Остроградского и Стокса.....	182
7.5. Полная система уравнений Максвелла.....	183
7.6. Преобразование уравнений Максвелла.....	184
7.7. Потенциалы ЭМП.....	185
7.7.1. Векторный и скалярный потенциалы ЭМП.....	185
7.7.2. Электрический и магнитный потенциалы Герца.....	186
7.8. Электромагнитное поле в низкочастотном приближении.....	187
7.9. Уравнения математической физики, описывающие ЭМП.....	188
Контрольные вопросы к главе 7.....	188
Библиографический список к главе 7.....	189
Глава 8. Частные модели электромагнитного поля.....	191
8.1. Модели статических электромагнитных полей.....	191
8.1.1. Общие виды статических моделей и полей.....	191
8.1.2. Электростатическое поле.....	192
8.1.3. Магнитостатическое поле.....	193
8.2. Модели магнитного поля стационарных токов.....	193
8.2.1. Расчет поля с помощью векторного потенциала.....	193
8.2.2. Примеры использования векторного потенциала.....	194
8.3. Модели квазистатических электромагнитных полей.....	198
8.4. Модель нестационарных электромагнитных полей.....	199
Контрольные вопросы к главе 8.....	199
Библиографический список к главе 8.....	199
Глава 9. Методы расчета статических и квазистатических электромагнитных полей.....	201
9.1. Метод разделения переменных.....	201
9.2. Метод конформных отображений.....	205

Контрольные вопросы к главе 9	213
Библиографический список к главе 9	213
Глава 10. Методы расчета переходных процессов в электромагнитном поле	214
10.1. О расчете переходных процессов в электромагнитном поле	214
10.2. Установление магнитного потока в пластине	215
10.3. Установление тока в проводе круглого сечения	219
10.4. Экранирование импульсного магнитного поля круговой цилиндрической оболочкой	223
Контрольные вопросы к главе 10	229
Библиографический список к главе 10	230
Глава 11. Распространение электромагнитного поля	231
11.1. Уравнения Максвелла в символической форме записи	231
11.2. Уравнения Максвелла в проводящей среде	232
11.3. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде	233
11.4. Теорема Умова–Пойнтинга	235
11.4.1. Общие сведения об энергии электромагнитного поля	235
11.4.2. Теорема Умова–Пойнтинга для мгновенных значений	237
11.4.3. Передача энергии от генератора к приемнику по коаксиальному кабелю	238
11.5. Теорема Умова–Пойнтинга в комплексной форме	242
Контрольные вопросы к главе 11	243
Библиографический список к главе 11	243
Глава 12. Расчет электромагнитных полей в анизотропных средах ..	244
12.1. Электромеханические материалы с анизотропными свойствами	244
12.2. Стационарные электрические и магнитные поля	245
12.2.1. Расчеты электрических полей	246
Примеры расчета электрических полей	251
12.2.2. Расчеты магнитных полей	255
12.3. Квазистатические электрические и магнитные поля	257
12.4. Волновые процессы в средах со структурной анизотропией	259
12.5. Расчет анизотропных экранов	260
12.5.1. Сферические экраны	260
12.5.2. Круговые цилиндрические экраны	264
12.5.3. Плоские экраны	270
Контрольные вопросы к главе 12	272
Библиографический список к главе 12	273
Глава 13. Электромагнитные поля в перемещающихся средах	274
13.1. Электромагнитное поле в движущейся среде	274
13.1.1. Особенности уравнений электромагнитного поля в движущейся среде	274

13.1.2. Уравнения электромагнитного поля в движущейся проводящей среде.....	274
13.1.3. Уравнения электромагнитного поля в движущейся диэлектрической среде.....	275
13.2. Электромагнитное поле во вращающихся преобразователях.....	276
13.2.1. Особенности транспортных вращающихся преобразователей.....	276
13.2.2. Физические основы электромеханического преобразования энергии.....	277
13.3. Магнитогидродинамические преобразователи.....	285
13.3.1. Основы магнитной гидродинамики.....	285
13.3.2. Магнитогидродинамический генератор.....	288
13.3.3. Магнитогидродинамический двигатель.....	288
13.4. Расчет электромагнитных полей в перемещающихся средах.....	289
13.4.1. Движение заряженных частиц в скрещенных полях.....	289
13.4.2. Движение сплошных проводящих сред в электромагнитном поле.....	293
13.4.3. Магнитное поле линейного цилиндрического индуктора.....	295
Контрольные вопросы к главе 13.....	300
Библиографический список к главе 13.....	301
Глава 14. Электромагнитное поле в электротехнических устройствах.....	302
14.1. Поверхностный эффект в электротехнических устройствах.....	302
14.1.1. Явление поверхностного эффекта.....	302
14.1.2. Поверхностный электрический эффект в прямоугольной шине.....	303
14.1.3. Поверхностный электрический эффект в круговом цилиндрическом проводнике.....	304
14.1.4. Поверхностный магнитный эффект в плоском ферромагнитном листе.....	307
14.2. Эффект близости для двух параллельных токопроводящих шин.....	309
14.3. Распространения электромагнитного поля в коаксиальном кабеле.....	311
Контрольные вопросы к главе 14.....	315
Библиографический список к главе 14.....	315
Глава 15. Специальные функции в уравнениях математической физики.....	316
15.1. Функции Лежандра.....	316
15.1.1. Дифференциальное уравнение Лежандра.....	316
15.1.2. Функции Лежандра 1-го рода.....	317
15.1.3. Функции Лежандра 2-го рода.....	317
15.2. Цилиндрические функции.....	318
15.2.1. Уравнение цилиндрических функций.....	318
15.2.2. Функции Бесселя 1-го и 2-го рода.....	320
15.2.3. Различные типы цилиндрических функций.....	324

15.3. Обобщенные функции	328
15.3.1. Общие сведения	328
15.3.2. Дельта-функция Дирака	332
Библиографический список к главе 15	333
Приложения	334
Приложение 1. Наиболее употребительные системы координат	334
Приложение 2. Элементы векторной алгебры	334
Скалярные произведения векторов	335
Векторные произведения векторов	335
Приложение 3. Дифференциальные операторы векторного анализа	336
Приложение 4. Дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах $\{q_1, q_2, q_3\}$:	337
Приложение 5. Принятые в литературе единицы измерения	337
Приложение 6. Сводка применений дифференциального оператора набла (∇)	339
Приложение 7. Уравнения Максвелла в обобщенных ортогональных координатах $\{q_1, q_2, q_3\}$	340
Список принятых обозначений и сокращений	341
Принятые обозначения	341
Принятые сокращения	341
Общий список литературы	343



S.A.L.D.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
АНТИВИРУСНАЯ
ЛАБОРАТОРИЯ
ДАНИЛОВА

www.SALD.ru
8 (812) 336-3739

АНТИВИРУСНЫЕ
ПРОГРАММНЫЕ ПРОДУКТЫ

Учебное пособие соответствует требованиям государственных образовательных стандартов ВПО по направлениям подготовки дипломированных специалистов: 650900 (специальность 140601.65 «Электротехника»), 654500 (специальности: 140601.65 «Электромеханика», 140602.65 «Электрические и электронные аппараты»); 654100 (специальность 210106 «Промышленная электроника») и направлениям подготовки бакалавров: 140200.62, 140600.62, 210100.62.

Книга предназначена для студентов всех специальностей 140211/100400, 140601/180100, 140602/180200, 210106/200400, изучающих дисциплину «Высшая математика», раздел «Уравнения математической физики», а также рекомендуется студентам других специальностей, изучающим курс математической физики, инженерам и аспирантам.

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки 140400 «Техническая физика» и 220100 «Системный анализ и управление».

 **ПИТЕР®**

Заказ книг:

197198, Санкт-Петербург, а/я 127
тел.: (812) 703-73-74, postbook@piter.com

61093, Харьков-93, а/я 9130
тел.: (057) 758-41-45, 751-10-02, piter@kharkov.piter.com

www.piter.com — вся информация о книгах и веб-магазин

ISBN: 978-5-496-00046-8



9 785496 000468